УДК 519.642.7

К. И. Малышев (Одес. ун-т)

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ

We justify direct methods of the approximate solution of systems of singular integral equations with the Cauchy kernel on unit circle in the case of nonnegative partial indices.

Наведено обгрунтування прямих методів наближеного розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші на одиничному колі при невід'ємних часткових індексах.

Пусть $\gamma = \{ t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1 \}$ — единичная окружность с центром в начале координат, разбивающая комплексную плоскость на две области: $D^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ и $D^- = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \}$. На γ рассматривается система сингулярных интегральных уравнений

$$K\varphi = K^0\varphi + T\varphi = g, \tag{1}$$

где

$$(K^0\varphi)(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)(S\varphi)(t), \qquad (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \tag{2}$$

$$(T\varphi)(t) = \int\limits_\gamma K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

а элементы известных m-мерных матриц-функций (м. ф.) $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$ принадлежат пространству $H_\alpha^{(r)}$ $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, равномерно по всем переменным, компоненты известной m-мерной вектор-функции (в. ф.) $g(t)$ принадлежат пространству $H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, или пространству $L_2^{(r)}$, $r \geq 0$. Предполагаем, что система уравнений (1) является нетеровой, т. е. $\det(A(t) \pm B(t)) \neq 0$ на γ. Обозначим через $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}, \ldots, \kappa_m^{(1)}$ и $\kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}, \ldots, \kappa_m^{(2)}$ системы частных индексов соответственно матриц $G^{(1)} = A(t) + B(t)$ и $G^{(2)} = A(t) - B(t)$. Тогда частные индексы системы (1) равны $\kappa_s = \kappa_s^{(2)} - \kappa_s^{(1)}$, а ее индекс определяется следующим образом: $\kappa = \sum_{s=1}^n \kappa_s = \sum_{s=1}^n \kappa_s^{(2)} - \kappa_s^{(1)}$.

Рассматривается случай, когда частные индексы системы (1) неотрицательны, а индекс системы положителен: $\kappa_j \geq 0$, $\kappa > 0$. Тогда, согласно [1], однородная система, соответствующая системе (1), имеет κ линейно независимых решений и для однозначного разрешения системы (1) нужно наложить κ дополнительных условий. Согласно [1, 2], при заданных предположениях относительно м. ф. $A(t)$, $B(t)$, $K(t,\tau)$ и в. ф. $g(t)$ оператор K ограничен и имеет ограниченный правый обратный оператор. Следовательно, согласно работе [3], существуют конечномерное пространство Z (в данном случае можно положить $Z = \mathbb{C}^\kappa$ — пространство векторов размерности κ с комплексными элементами) и конечномерный оператор Γ, действующий из пространства решений системы (1) в пространство Z, задающий дополнительные условия на искомое решение, которые необходимы для единственности решения уравнения (1). Пусть

$$\Gamma\varphi = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \ldots, f_\kappa(\varphi)) = (a_1, a_2, \ldots, a_\kappa) \tag{4}$$

— данные ограничения, фиксирующие единственное решение, где $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$

— линейные ограниченные функционалы, а $a = (a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)$ — известный вектор размерности κ с комплексными компонентами. Заметим, что выбор линейных функционалов диктуется условиями решаемой прикладной задачи.

Пусть $X\,(Y)$ — пространство решений (правых частей) системы (1). Тогда совокупность системы (1) и условий (4) можно записать, согласно [3], в виде

$$(N\varphi)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big\langle (K\varphi)(t), \Gamma\varphi \big\rangle = \big\langle f(t), a \big\rangle. \tag{5}$$

Поскольку операторы K, K_r^{-1} ограничены и условия (4) обеспечивают единственность решения системы (1), (4), то, согласно [3], оператор $N: X \to Y + Z$ ограничен и существует ограниченный оператор $N^{-1}: Y + Z \to X$. Приближенные решения системы уравнений (1) ищем в виде

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(m)}), \quad \varphi_k^{(j)} = \sum_{k=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} c_k^{(j)} t^k, \quad j = \overline{1, m}, \tag{6}$$

а неизвестные постоянные $c_k^{(j)}$ определяем в случае метода *коллокации* из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [A_{lj}(t_\nu) + B_{lj}(t_\nu)] \sum_{k=0}^{n-c_j^{(1)}} c_k^{(j)} t_\nu^k \right\} + \sum_{j=1}^{m} \left\{ [A_{lj}(t_\nu) - B_{lj}(t_\nu)] \sum_{k=-n-c_j^{(2)}}^{-1} c_k^{(j)} t_\nu^k \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{k=-n-c_j^{(2)}}^{n-c_j^{(1)}} c_k^{(j)} \int_\gamma K_{lj}(t_\nu, \tau)\tau^l \, d\tau \right\} = g_l(t_\nu), \quad \nu = \overline{-k, k}, \quad l = \overline{1, m}; \tag{7}$$

$$\Gamma(\varphi_n) \equiv \big(f_1(\varphi_n), f_2(\varphi_n), \ldots, f_\kappa(\varphi_n)\big) = (a_1, a_2, \ldots, a_\kappa), \tag{8}$$

где $A_{lj}(t)$, $B_{lj}(t)$, $K_{lj}(t, \tau)$, $g_l(t)$ — элементы соответственно м. ф. $A(t)$, $B(t)$, $K(t, \tau)$ и в. ф. $g(t)$, $t_\nu = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{2n+1}\nu\right)$, $\nu = \overline{-k, k}$.

Положим в качестве пространства X пространство W^m т. е. [4] пространство в. ф. $\varphi(t) \in \mathbb{C}(\gamma)^m$ таких, что $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$ $\varphi^\pm(t) \in \mathbb{C}(\gamma)^m$, $\varphi^\pm(t)$ являются аналитически продолжимыми соответственно в $D^\pm$, при этом $\|\varphi(t)\|_X = \|\varphi^+(t)\|_{\mathbb{C}(\gamma)^m} - \|\varphi^-(t)\|_{\mathbb{C}(\gamma)^m}$. Тогда, согласно работе [4], имеем $\|S\|_{X\to X} = 1$. Пусть Y — пространство в. ф. $f(t) \in W^m$ с нормой $\|f(t)\|_Y = \|f(t)\|_{\mathbb{C}(\gamma)^m}$. Рассмотрим в качестве пространства X_n множество агрегатов вида (6), а Y_n — множество m-мерных векторов, компоненты которых — многочлены степени не выше n, т. е. $y_n \in Y_n$, если $y_n = \sum_{k=-n}^{n} b_k t^k$, где b_k — векторы размерности m. Тогда

$$\dim X_n = \sum_{j=1}^{m} [(n - \kappa_j^{(1)}) - (-n + \kappa_j^{(2)}) + 1] = m(2n+1) + \sum_{j=1}^{m} \kappa_j =$$

$$= m(2n+1) + \kappa = \dim Y_n + \dim Z.$$

Обозначим через Q_n оператор, который ставит в соответствие каждому элементу $\varphi(t) \in X$ обобщенный многочлен наилучшего приближения вида (6). Ясно, что $Q_n: X \to X_n$, $Q_n^2 = Q_n$ и $\|Q_n\|_{X\to X_n} = 1$. Обозначим через L_n

оператор интерполяции Лагранжа по $2n+1$ равноотстоящим узлам t_ν. Тогда $L_n : Y \to\to Y_n$, $L_n^2 = L_n$ и для каждого n выполнено $\| L_n \| < \infty$ [5]. Согласно [6], систему уравнений (7), (8) можно записать в виде

$$(P_n N Q_n \varphi_n)(t) \equiv \langle (L_n N Q_n \varphi_n)(t), \Gamma Q_n \varphi_n \rangle = \langle (L_n g)(t), Ea \rangle, \tag{9}$$

где E — единичная матрица порядка m, а оператор $P_n \overset{\text{def}}{=} \langle L_n, E \rangle : Y + Z \to Y_n + Z$. Ясно, что $P_n^2 = P_n$ и при каждом n оператор P_n является ограниченным.

Теорема 1. *Пусть элементы м. ф.* $A(t), B(t), K(t,\tau) \in H_\alpha^{(r)}$ *равномерно по всем переменным, а элементы в. ф.* $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha < 1$; $\det(A(t) \pm \pm B(t)) \ne 0$ *на* γ, $\kappa_s^{(2)} \ge \kappa_s^{(1)}$, $s = \overline{1, m}$, $\kappa > 0$, *и система* (1), (4) *имеет единственное решение. Тогда система уравнений* (7), (8) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а последовательность приближенных решений* $\varphi_n(t)$ *системы* (1) *сходится в пространстве* W *к ее точному решению* $\varphi^*(t)$, *удовлетворяющему условиям* (4) *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n(t) \|_W = O(n^{-r-\alpha} \ln n). \tag{10}$$

Доказательство. Перепишем (1) в виде

$$K\varphi \equiv G^{(1)} P^+ \varphi - G^{(2)} P^- \varphi + T\varphi = g,$$

где операторы P^+ и P^- определены следующим образом: $P^+ \equiv \frac{1}{2}(I + S)$, $P^- \equiv \equiv \frac{1}{2}(I - S)$, а $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ — операторы умножения на соответствующие м. ф. Из условий теоремы и работы [1] следует справедливость факторизации

$$(G^{(1)}(t))^{-1} G^{(2)}(t) = [A(t) + B(t)]^{-1} [A(t) - B(t)] = G_-^{-1}(t) \lambda(t) G_+(t),$$

где м. ф. $G_\pm$ являются аналитически продолжимыми соответственно в $D_\pm$, а м. ф. $\lambda(t)$ имеет вид $\lambda(t) = \operatorname{diag}\{t^{\kappa_j}\}_{j=1}^m$. Справедливо представление $\lambda(t) = = (\lambda^{(1)}(t))^{-1} \lambda^{(2)}(t)$, где $\lambda^{(1)}(t) = \operatorname{diag}\{t^{\kappa_j^{(1)}}\}_{j=1}^m$, $\lambda^{(2)}(t) = \operatorname{diag}\{t^{\kappa_j^{(2)}}\}_{j=1}^m$. Тогда в соответствии с формулами Сохоцкого система (1) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$K^{(1)}\varphi \equiv G_- \lambda^{(1)} P^+ \varphi - G_+ \lambda^{(2)} P^- \varphi + T^{(1)} \varphi = g^{(1)}. \tag{11}$$

Здесь G_+, G_-, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ — операторы умножения на соответствующие м. ф., а $T^{(1)}\varphi \equiv G_- \lambda^{(1)} (G^{(1)})^{-1} T\varphi$, $g^{(1)} \equiv G_- \lambda^{(1)} (G^{(1)})^{-1} g$. Рассмотрим вспомогательный оператор

$$K_n^{(1)}\varphi \equiv G_{-,n} \lambda^{(1)} P^+ \varphi - G_{+,n} \lambda^{(2)} P^- \varphi + L_n T^{(1)} \varphi, \tag{12}$$

получающийся из оператора (11) заменой операторов умножения на м. ф. $G_\pm(t)$ операторами умножения на м. ф.:

$$G_{+,n}(t) = \left\{ \sum_{k=0}^{n+1-\kappa_j^{(2)}} a_k^{(i,j)} t^k \right\}_{i,j=1}^m, \quad G_{-,n}(t) = \left\{ \sum_{k=-n-\kappa_j^{(1)}}^{-1} a_k^{(i,j)} t^k \right\}_{i,j=1}^m.$$

Элементы этих м. ф. являются многочленами наилучшего приближения соответствующих элементов м. ф. $G_{\pm}(t)$. Чтобы данное определение было корректным, потребуем выполнения условия $n \geq \max\limits_{j=1,n} \left\{ |\kappa_j^{(1)}|, |\kappa_j^{(2)}| \right\}$. Согласно [4, 5], справедливы оценки $\| G_{\pm}(t) - G_{\pm,n}(t) \| \leq d_1 n^{-r-\alpha}$. Нетрудно заметить, что $K_n^{(1)} : X \to Y$ и $K_n^{(1)}(X_n) \subseteq Y_n$. Действительно, из (6) получаем

$$(P^+\varphi_n)(t) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-\kappa_j^{(1)}} c_k^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m, \qquad (P^-\varphi_n)(t) = \left\{ \sum_{k=-n-\kappa_j^{(2)}}^{-1} c_k^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m.$$

Отсюда

$$(\lambda^{(1)} P^+ \varphi_n)(t) = \left\{ t^{\kappa_j^{(1)}} \sum_{k=0}^{n-\kappa_j^{(1)}} c_k^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m = \left\{ \sum_{k=\kappa_j^{(1)}}^{n} c_{k-\kappa_j^{(1)}}^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m,$$

$$(\lambda^{(2)} P^- \varphi_n)(t) = \left\{ t^{\kappa_j^{(2)}} \sum_{k=-n-\kappa_j^{(2)}}^{-1} c_k^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m = \left\{ \sum_{k=-n}^{\kappa_j^{(2)}-1} c_{k-\kappa_j^{(2)}}^{(j)} t^k \right\}_{j=1}^m.$$

Используя полученные равенства, нетрудно убедиться, что $K^{(1)}\varphi_n \in Y_n$ для любой в. ф. $\varphi_n \in X_n$. Оценим норму разности:

$$\left\| K^{(1)} - K_n^{(1)} \right\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \left\| K^{(1)}\varphi - K_n^{(1)}\varphi \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \| G_- \lambda^{(1)} P^+ \varphi - G_+ \lambda^{(2)} P^- \varphi - G_{-,n} \lambda^{(1)} P^+ \varphi + G_{+,n} \lambda^{(2)} P^- \varphi \| +$$

$$+ \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left\| T^{(1)}\varphi - L_n T^{(1)}\varphi \right\| \leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \| (G_- - G_{-,n}) \lambda^{(1)} P^+ \varphi \| +$$

$$+ \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \| (G_+ - G_{+,n}) \lambda^{(2)} P^- \varphi \| + \| T^{(1)} - L_n T^{(1)} \| \leq$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left[\| G_- - G_{-,n} \|_C \| \varphi^+ \|_C + \| G_+ - G_{+,n} \|_C \| \varphi^- \|_C \right] +$$

$$+ \| T^{(1)} - L_n T^{(1)} \| \leq d_2 n^{-r-\alpha} \ln n.$$

Следуя работе [3], вводим такие операторы:

$$N\varphi \equiv \langle K\varphi, \Gamma\varphi \rangle : X \to Y + Z,$$

$$N^{(1)}\varphi \equiv \langle K^{(1)}\varphi, \Gamma\varphi \rangle : X \to Y + Z,$$

$$N_n^{(1)}\varphi \equiv \langle K_n^{(1)}\varphi, \Gamma\varphi \rangle : X \to Y + Z, \qquad N_n^{(1)}(X_n) \subseteq Y_n + Z.$$

Тогда, поскольку в условиях теоремы оператор N ограничен и имеет ограниченный обратный, оператор $N^{(1)}$ также ограничен и имеет ограниченный обратный. Кроме того, так как $\| N^{(1)} - N_n^{(1)} \| \to 0$ при $n \to \infty$, то при $n \geq n_1$ операторы $N_n^{(1)}$ также обратимы. Однако, поскольку из обратимости оператора следует обратимость его сужения $N_n^{(1)}|_{X_n} : X_n \to Y_n + Z$, то существует ограниченный оператор $(N_n^{(1)}|_{X_n})^{-1} : Y_n + Z \to X_n$.

Используя равенство $L_n(aL_nb) = L_n(ab)$ для произвольних $a, b \in W$, нетрудно убедиться, что уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\tilde{N}_n^{(1)}\varphi_n \equiv \langle L_n N^{(1)}\varphi_n, \Gamma\varphi_n\rangle = \langle L_n g^{(1)}, Ea\rangle. \tag{13}$$

Оценим норму разности между операторами $N_n^{(1)}$ и $\tilde{N}_n^{(1)}$:

$$\| \tilde{N}_n^{(1)} - N_n^{(1)} \|_{X_n \to Y_n + Z} = \| \tilde{K}_n^{(1)} - K_n^{(1)} \|_{X_n \to Y_n} =$$

$$= \| L_n K^{(1)} - K^{(1)} \|_{X_n \to Y_n} \le d_3 n^{-r-\alpha} \ln n.$$

Поскольку при $n \ge n_1$ оператор $N_n^{(1)}$ обратим, то при $n \ge n_2$, а именно, для тех n, для которых выполняется неравенство

$$\| (N^{(1)})^{-1} \| (d_2 + d_3) n^{-r-\alpha} \ln n < 1,$$

оператор $\tilde{N}_n^{(1)}$ также обратим. Причем, поскольку выполняется $\| \tilde{N}_n^{(1)} - N^{(1)} \| \le d_4 n^{-r-\alpha} \ln n$ и $\| \tilde{g}_n^{(1)} - g^{(1)} \| \le d_5 n^{-r-\alpha} \ln n$, то из [6] получаем требуемую скорость сходимости. Теорема 1 доказана.

В случае метода *редукции* приближенные решения ищем в виде (6), а неизвестные постоянные определяем из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-\kappa_j^{(1)}} a_{\nu-k}^{(lj)} c_k^{(j)} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=-n-\kappa_j^{(2)}}^{-1} b_{\nu-k}^{(lj)} c_k^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} d_{\nu k}^{(lj)} c_k^{(j)} = g_\nu^{(j)}, \quad \nu = \overline{-k, k}, \quad l = \overline{1, m}; \tag{14}$$

$$\Gamma(\varphi_n) \equiv \big(f_1(\varphi_n), f_2(\varphi_n), \ldots, f_\kappa(\varphi_n)\big) = (a_1, a_2, \ldots, a_\kappa). \tag{15}$$

Здесь $a_\nu^{(lj)}$, $b_\nu^{(lj)}$, $d_{\nu k}^{(lj)}$, $g_\nu^{(l)}$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $[A_{lj}(t) + B_{lj}(t)]$, $[A_{lj}(t) - B_{lj}(t)]$, $\int_\gamma K_{lj}(t,\tau)\tau^k d\tau$, $g_l(t)$ по системе функций t^ν.

Теорема 2. *Пусть элементы м. ф.* $A(t), B(t), K(t,\tau) \in H_\alpha^{(r)}$ *равномерно по всем переменным,* $\det(A(t) \pm B(t)) \ne 0$ *на* γ, $\kappa_s^{(2)} \ge \kappa_s^{(1)}$, $s = \overline{1, m}$, $\kappa > 0$, *и система* (1), (4) *имеет единственное решение. Тогда система уравнений* (14), (15) *однозначно разрешима при достаточно больших* n. *Причем если элементы в. ф.* $f(t) \in L_2^{(r)}$, $r \ge 0$, *то при* $r = 0$ *последовательность приближенных решений* $\varphi_n(t)$ *системы* (1) *сходится в пространстве* L_2 *к ее точному решению* $\varphi^*(t)$, *удовлетворяющему условиям* (4), *т. е.*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n(t) \|_{L_2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а при $r > 0$ *последовательность приближенных решений* $\varphi_n(t)$ *системы* (1) *сходится в пространстве* $L_2^{(r)}$ *к ее точному решению* $\varphi^*(t)$, *удовлетворяющему условиям* (4) *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n(t) \|_{L_2} = O(n^{-r}).$$

Теорема 3. *Пусть элементы м. ф.* $A(t), B(t), K(t,\tau) \in H_\alpha^{(r)}$ *равномерно по всем переменным,* $\det(A(t) \pm B(t)) \ne 0$ *на* γ, $\kappa_s^{(2)} \ge \kappa_s^{(1)}$, $s = \overline{1, m}$, $\kappa > 0$, *и* *система* (1), (4) *имеет единственное решение. Если элементы в. ф.* $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *то последовательность приближенных решений* $\varphi_n(t)$ *системы* (1) *сходится к ее точному решению* $\varphi^*(t)$, *удовлетворяющему условиям* (4) *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n(t) \|_{L_2} = O(n^{-r-\alpha}).$$

Теоремы 2 и 3 доказываются по схеме доказательства теоремы 1.

В случае метода *механических квадратур* применим, согласно [7, 8], для вычисления интегралов вида $\int_\gamma K_{lj}(t_\nu, \tau)\tau^k \, d\tau$ следующие квадратурные формулы:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma K_{lj}(t_\nu, \tau)\tau^k \, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma U^\tau_{n+\kappa_j}[\tau K_{lj}(t_\nu, \tau)]\tau^{k-1} \, d\tau =$$

$$= \sum_{s=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} t_s^{(j)} K(t_\nu, \tau) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma l_s^{(j)}(t)\tau^{k-1} \, d\tau = \sum_{s=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} t_s^{(j)} K(t_\nu, \tau) \Lambda_{-k}^{(js)}.$$

Здесь $U_{n+\kappa_j}$, $j = \overline{1, m}$, — операторы интерполирования по $n + \kappa_j$ равноотстоящим узлам вида

$$(U_{n+\kappa_j} y)(t) = \sum_{s=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} y(t_s^{(j)}) l_s^{(j)}(t), \qquad t \in \gamma, \qquad l_s^{(j)}(t) = \sum_{r=-n-\kappa_j^{(2)}}^{n-\kappa_j^{(1)}} \Lambda_r^{(js)} t^r,$$

где

$$t_s^{(j)} = \exp\left(\frac{2\pi i}{2n+1+\kappa_j} s\right), \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{-n-\kappa_j^{(2)}, n-\kappa_j^{(1)}}.$$

Используя эти формулы, получаем следующую систему:

$$\sum_{j=1}^{m} \left\{ [A_{lj}(t_\nu) + B_{lj}(t_\nu)] \sum_{k=0}^{n-c_j^{(1)}} c_k^{(j)} t_\nu^k \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ [A_{lj}(t_\nu) - B_{lj}(t_\nu)] \sum_{k=-n-c_j^{(2)}}^{-1} c_k^{(j)} t_\nu^k \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{k=-n-c_j^{(2)}}^{n-c_j^{(1)}} c_k^{(j)} 2\pi i \sum_{s=-n-c_j^{(2)}}^{n-c_j^{(1)}} t_s^{(j)} K_{lj}(t_\nu, t_s^{(j)}) \Lambda_{-k}^{(js)} \right\} = g_l(t_\nu), \tag{16}$$

$$\nu = \overline{-k, k}, \qquad l = \overline{1, m};$$

$$\Gamma(\varphi_n) \equiv (f_1(\varphi_n), f_2(\varphi_n), \ldots, f_\kappa(\varphi_n)) = (a_1, a_2, \ldots, a_\kappa), \tag{17}$$

где $A_{lj}(t)$, $B_{lj}(t)$, $K_{lj}(t, \tau)$, $g_l(t)$ — элементы соответственно м. ф. $A(t)$, $B(t)$, $K(t, \tau)$ и в. ф. $g(t)$. Значения t_ν и $t_s^{(j)}$ определены выше.

Теорема 4. *Пусть элементы м. ф.* $A(t), B(t), K(t, \tau) \in H_\alpha^{(r)}$ *равномерно по всем переменным, а элементы в. ф.* $f(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < 1$; $\det(A(t) \pm \pm B(t)) \neq 0$ *на* γ, $\kappa_s^{(2)} \geq \kappa_s^{(1)}$, $s = \overline{1, m}$, $\kappa > 0$, *и система* (1), (4) *имеет единственное решение. Тогда система уравнений* (16), (17) *однозначно разрешима* *при достаточно больших n, а последовательность приближенных решений $\varphi_n(t)$ системы* (1) *сходится в пространстве W к ее точному решению $\varphi^*(t)$, удовлетворяющему условиям* (4) *со скоростью*

$$\| \varphi^*(t) - \varphi_n(t) \|_W = O(n^{-r-\alpha} \ln n).$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что система (16) эквивалентна уравнению

$$\hat{K}_n \varphi_n \equiv L_n K^0 \varphi_n + L_n \int_\gamma L_n^\tau (K(t, \tau) \varphi_n(\tau)) d\tau = L_n g, \tag{18}$$

где оператор L_n^τ определяется следующим образом:

$$(L_n^\tau \varphi)(\tau) = ((U_{n+\kappa_1} \varphi^{(1)})(\tau), (U_{n+\kappa_2} \varphi^{(2)})(\tau), \ldots, (U_{n+\kappa_m} \varphi^{(m)})(\tau)).$$

Поскольку операторы $U_{n+\kappa_1}$ являются операторами Лагранжа, то для них выполняются те же оценки, что и для операторов L_n, только с другими постоянными. Преобразуем уравнение (18) к виду

$$\hat{K}_n^{(1)} \varphi_n \equiv G_- \lambda^{(1)} P^+ \varphi_n - G_+ \lambda^{(2)} P^- \varphi_n +$$

$$+ L_n G_- \lambda^{(1)} (G^{(1)})^{-1} \int_\gamma L_n^\tau (K(t, \tau) \varphi_n(\tau)) d\tau = L_n G_- \lambda^{(1)} (G^{(1)})^{-1} g.$$

Оценив разность между операторами $\tilde{N}_n^{(1)}$ и $\hat{N}_n^{(1)} = \langle \hat{K}_n^{(1)}, \Gamma \rangle$, аналогично [8] получим

$$\left\| \tilde{N}_n^{(1)} - \hat{N}_n^{(1)} \right\| = \left\| \tilde{K}_n^{(1)} - \hat{K}_n^{(1)} \right\| \le d_6 n^{-r-\alpha} \ln n.$$

Используя результаты [6], получаем выполнение утверждения теоремы.

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 380 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Малышев К. И., Тихоненко Н. Я.* Прямые методы приближенного решения операторных уравнений с ненулевым ядром // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1202 – 1214.
4. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1968. – 468 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1986. – 424 с.
6. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 244 с.
7. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 461 с.
8. *Золотаревский В. А.* Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 183 с.

Получено 12.05.97