УДК 519.217.4

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины "КПИ", Киев)

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФУЗИОННЫХ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

For transition probabilities of diffusion processes in the Hilbert space, we construct finite-dimensional approximations and establish sufficient conditions of the equivalence of measures of this sort in the case of perturbance of diffusion operator.

Для перехідних ймовірностей дифузійних процесів у гільбертовому просторі побудовано скінченновимірні апроксимації та знайдено достатні умови еквівалентності таких мір при збуренні дифузійного оператора.

1. Постановка задачи. Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, удовлетворяющий уравнению Ито

$$\xi(t) = x + \int_0^t A(\xi(\tau))\,dW(\tau) + \int_0^t b(\xi(\tau))\,d\tau, \tag{1}$$

где $x \in H$, $W(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в H_- [1]. Через $\langle\,,\rangle$, $|\cdot|$ обозначаются скалярное произведение и норма в H, через σ_2 — операторная норма Гильберта – Шмидта. Далее всюду предполагается, что диффузионный оператор $A(x)$ и вектор сноса $b(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\alpha K \le A^*(x)A(x) \le \beta K$, где $\alpha > 0$, K — положительный ядерный оператор в H;

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle b(x), e_k\rangle^2$ сходится равномерно для некоторого ортобазиса $\{e_k\}$ и его сумма $|b(x)|^2 < c$;

3) векторное $b(x)$ и операторное $A(x)$ поля дифференцируемы, а их производные удовлетворяют неравенствам

$$|b'(x)h| < |Sh|, \quad \sigma^2(A'(x)h) < |Sh|, \quad h \in H,$$

где S — оператор Гильберта – Шмидта.

Условия 1 – 3 обеспечивают однозначную разрешимость уравнения (1). Пусть $P(t, x, \Gamma)$ — переходная вероятность диффузионного процесса $\xi(t)$, называемая в дальнейшем также диффузионной мерой. Эти же условия гарантируют дифференцируемость меры $P(t, x, \Gamma)$ вдоль подпространства H_+, плотного в H [2].

Пусть Π_n — n-мерный ортопроектор в H. Рассмотрим наряду с (1) уравнение для диффузионного процесса $\eta_n(t) \in \Pi_n H$:

$$\eta_n(t) = \Pi_n x + \int_0^t \Pi_n A(\eta_n(\tau))\,dW(\tau) + \int_0^t \Pi_n b(\eta_n(\tau))\,d\tau \tag{2}$$

с переходной вероятностью

$$P_n(t, \Pi_n x, \Delta_n) = \int_{\Delta_n} p_n(t, \Pi_n x, y_n)\,dy_n,$$

где $\Delta_n \in \mathcal{B}_n$ — борелевской σ-алгебре в R^n, $y_n \in R^n$, а плотность $p_n(t, x_n, y_n)$ является фундаментальным решением параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Pi_n A^*(\Pi_n x)\,A(\Pi_n x)\,\Pi_n u'' + \langle \Pi_n b(\Pi_n x), u'\rangle. \tag{3}$$

В работе доказывается сходимость при $n \to \infty$ последовательности процессов $\eta_n(t)$ и их переходных вероятностей к процессу $\xi(t)$ и диффузионной мере $P(t, x, \cdot)$ соответственно; этот результат, с использованием ранее полученных оценок для плотности p_n, позволяет установить свойство диффузионной меры $P(t, x, \Gamma)$ — абсолютную непрерывность при возмущении диффузионного оператора.

Запишем уравнение (3) в форме (индекс n опущен)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} g^{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + b^k(x)\frac{\partial u}{\partial x^k}, \qquad x \in \Pi_n H, \tag{3а}$$

где $g^{jk}(x)$ — невырожденная матрица диффузионного оператора $\Pi_n A^*(x) \times A(x)\Pi_n$, и пусть $p(t, x, y)$ — фундаментальное решение (3а) (ядро теплопроводности). Известный результат С. Варадана [3] устанавливает следующую асимптотику этого ядра:

$$\lim_{t \downarrow 0} t \ln p(t, x, y) = -\frac{\rho^2(x, y)}{2}, \tag{4}$$

где

$$\rho(x, y) = \sqrt{T \inf_\gamma \int_0^T g_{jk}(\gamma(\tau))\,\dot\gamma^j(\tau)\,\dot\gamma^k(\tau)\,d\tau} \tag{5}$$

— риманово расстояние в R^n, порожденное метрическим тензором $g_{jk}(x)$ (матрица, обратная диффузионной). Иначе говоря, на основании равенства (4) можно рассматривать R^n как риманово многообразие с метрикой (5). Если выбрать коэффициенты сноса специальным образом:

$$b^k = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^r} g^{rk} g_{ij}$$

или в бескоординатной форме

$$\langle b(x), h\rangle = \frac{1}{2}\langle \operatorname{tr} B'(x), h\rangle - \frac{1}{2}\operatorname{tr} B'(x)\,(B(x)h)\,B^{-1}(x),$$

где $B(x) = \Pi_n A^*(x)\,A(x)\,\Pi_n$, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \tag{3б}$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами, а фундаментальное решение оказывается симметричным:

$$p(t, x, y) = p(t, y, x).$$

Ниже всюду предполагается, что снос выбран указанным образом.

Оценкам ядра теплопроводности на римановом многообразии посвящено большое число работ (см. [4]; там же имеются ссылки). В упомянутых работах получены двусторонние оценки вида

$$f_1 \le \frac{p(t,x,y)}{q(t,x,y)} \le f_2, \qquad q(t,x,y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\},$$

функции f_j зависят, в частности, от кривизны многообразия и его размерности. В [5, 6] при некоторых ограничениях на кривизну установлены аналогичные оценки для $p(t,x,y)$, причем f_j не зависят от размерности. Последнее обстоятельство и позволяет получить сформулированные ниже результаты о поведении меры $P(t,x,\Gamma)$ в гильбертовом пространстве.

2. Формулировка условий. Условия будут формулироваться в терминах диффузионного оператора

$$B(x) = \Pi_n A^*(x) A(x) \Pi_n, \qquad x \in \Pi_n H = R^n,$$

или коэффициентов его матрицы $g^{jk}(x)$ и ее производных. Обратная матрица $g_{jk}(x)$ как метрический тензор задает в R^n новое скалярное произведение

$$(u,\nu) = g_{jk}(x) u^j \nu^k = \left\langle B^{-1}(x)u, \nu \right\rangle, \qquad \|u\|^2 = (u,u),$$

где матрица оператора и координаты векторов задаются в ортонормированном (по отношению к исходному скалярному произведению $\langle\,,\rangle$) базисе. Коэффициенты связности и тензор кривизны определяются соответственно равенствами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right),$$

$$R_{ijlk} = \frac{1}{2} g^{kr}\left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k}\right) + g_{pq}\left(\Gamma_{jk}^p \Gamma_{il}^q - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jl}^q\right).$$

Следующие формулы определяют соответственно секционную и скалярную кривизну многообразия:

$$\frac{R_{ijkl} u^i \nu^j \nu^k u^l}{\|u\|^2 \|\nu\|^2 - (u,\nu)^2}; \qquad r(x) = g^{ik} g^{jl} R_{ijlk}.$$

Условия на многообразие, при которых можно получить не зависящие от размерности оценки фундаментального решения, сформулированы в [5] в терминах кривизны. Эти условия состоят в неположительности секционной кривизны и достаточно быстром ее убывании на бесконечности. В данной работе будем ссылаться на упомянутые ограничения как на условие 4.

Пример. Для двумерной поверхности в R^3, заданной явным уравнением $z = f(x,y)$, гауссова (совпадающая с секционной) кривизна равна

$$\frac{1}{1+f_x^2+f_y^2}\left(f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2\right),$$

Пусть $f^1, \ldots, f^n$ — функции двух переменных такие, что $f_{xx}^k f_{yy}^k < (f_{xy}^k)^2$.

Рассмотрим многообразие размерности $2n$ — метрическое произведение n двумерных поверхностей $z = f^k(x,y)$, $k = 1, \ldots, n$. Метрический тензор такого многообразия имеет блочный вид и его ненулевые компоненты таковы:

$$g_{2k-1,2k-1}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right) = 1 + \left(f_{2k-1}^k\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right)\right)^2;$$

$$g_{2k-1,\,2k}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right) = f_{2k-1}^{k}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right) f_{2k}^{k}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right);$$

$$g_{2k,\,2k}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right) = 1 + \left(f_{2k}^{k}\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right)\right)^2,$$

а собственные числа

$$\lambda_{2k-1} = 1, \quad \lambda_{2k} = 1 + \left(f_{2k-1}^{k}\right)^2 + \left(f_{2k}^{k}\right)^2, \quad f_j^k = \frac{\partial f^k}{\partial x^j}.$$

Несложно получить выражение для обратной матрицы и секционной кривизны — последняя оказывается неположительной. Поскольку исходным объектом является диффузионный оператор Гильберта – Шмидта в H, то для построения метрического тензора следует брать функции

$$f^k\left(x^{2k-1}, x^{2k}\right) = h^k\left(\mu_k x^{2k-1}, \mu_k x^{2k}\right),$$

где числа $\mu_k > 0$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty$. Тогда условие 4 остается справедливым, и если положить $\tilde{g}_{jk}(x) = g_{jk}(x) + t_{jk}$, где t_{jk} — матрица постоянного оператора $T > 0$, собственные числа которого удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{\lambda_k} < c$ для всех n, то след оператора $\tilde{G}_{2n}^{-1}(x) = \Pi_{2n} B(x) \Pi_{2n}$ ограничен, т. е. $\operatorname{tr} \tilde{G}_{2n}^{-1}(x) < c$, и $B(x)$ в H оказывается ядерным.

3. Основные результаты. Обозначим через $\mathcal{B}_n$ борелевскую σ-алгебру в $R^n = \Pi_n H$, а через Π_n^{n+k} — ортопроектор из R^{n+k} в R^n ($\Pi_{n+k} H$ в $\Pi_n H$). Если $\Delta_n \in \mathcal{B}_n$, то $\Pi_n^{-1}\Delta_n = \Pi_{n+k}^{-1}\left(\Pi_n^{n+k}\right)^{-1}\Delta_n$ есть цилиндрическое множество в H.

Рассмотрим следующую ситуацию: дана случайная величина ξ со значениями в H и последовательность η_n случайных величин $\eta_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \in \Pi_n H$ с распределениями μ и ν_n соответственно. Определим для цилиндрического множества $\Gamma = \Pi_n^{-1}\Delta_n$, $\Delta_n \in \mathcal{B}_n$, последовательность мер

$$\tilde{\nu}_{n+k}(\Gamma) = \nu_{n+k}\left(\left(\Pi_n^{n+k}\right)^{-1}\Delta_n\right).$$

Рассмотрим также последовательность случайных величин $\xi_n = \Pi_n \xi$ с распределениями

$$\mu_n(\Delta_n) = \mu\left(\Pi_n^{-1}\Delta_n\right),$$

образующими согласованное семейство мер. Пусть $\mathfrak{A}_n \subset \mathcal{B}_n$ — алгебра множеств в $\Pi_n H$, граница которых имеет нулевую лебегову меру, $\mathfrak{A}$ — алгебра цилиндрических множеств в H таких, что

$$\mathfrak{A} \ni \Gamma = \Pi_n^{-1}\Delta_n \Leftrightarrow \left(\Pi_n^{n+k}\right)^{-1}\Delta_n \in \mathfrak{A}_{n+k}, \quad k \geq 0.$$

Лемма. *Пусть мера μ дифференцируема вдоль некоторого линейного многообразия $H_+ \subset H$, причем H_+ плотно в H, и логарифмическая производная $\lambda_h(x) = (\lambda(x), h)$, определяемая из соотношения*

$$d_h \mu(A) = \frac{d}{ds}\mu(A + sh)\Big|_{s=0} = \int_A (\lambda(x), h)\,\mu(dx), \quad x \in H_+,$$

интегрируема в квадрате по мере μ. Тогда для $\Gamma \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\nu}_{n+k}(\Gamma) = \mu(\Gamma).$$

Доказательство. Из дифференцируемости меры μ вдоль H_+ следует дифференцируемость каждой ее проекции μ_n вдоль произвольного вектора из $\Pi_n H$. Последнее свойство означает абсолютную непрерывность μ_n относительно меры Лебега

$$\mu_n(\Delta_n) = \int_{\Delta_n} \rho_n(x_n)\, dx_n,$$

откуда для $\Gamma \in \mathfrak{A}$, $\Gamma = \Pi_n^{-1}\Delta_n$, и для всех n

$$\mu(\partial\Gamma) = \mu_n(\partial\Delta_n) = \int_{\partial\Delta_n} \rho(x_n)\, dx_n = 0,$$

где ∂A — граница множества A. Из условия леммы $(\eta_n \xrightarrow{p} \xi)$ следует сходимость ν_n на множествах непрерывности меры μ, т. е. на элементах $\mathfrak{A}$.

Следствие. *Последовательность мер $P_n(t, \Pi_n x, \cdot)$ сходится к мере $P(t, x, \cdot)$ на множествах из $\mathfrak{A}$ для $x \in H$, $t > 0$.*

Доказательство. Поскольку мера $P(t, x, \cdot)$ дифференцируема вдоль H_+, то достаточно доказать сходимость $\eta_n(t) \xrightarrow{p} \xi(t)$. Вычитая из (2) уравнение

$$\Pi_n\xi(t) = \Pi_n x + \int_0^t \Pi_n A(\xi(\tau))\, dW(\tau) + \int_0^t \Pi_n b(\xi(\tau))\, d\tau$$

и полагая $\xi_n(t) = \Pi_n\xi(t)$, получаем в силу неупреждаемости всех подынтегральных функций оценку

$$\begin{aligned} E|\xi_n(t) - \eta_n(t)|^2 \le\ & 4\Big[\int_0^t E\operatorname{tr}\Pi_n\big(A(\xi_n(\tau)) - A(\eta_n(\tau))\big)\big(A^*(\xi_n(\tau)) - A^*(\eta_n(\tau))\big)\Pi_n\, d\tau\ + \\ & + t\int_0^t E|\Pi_n(b(\xi_n(\tau)) - b(\eta_n(\tau)))|^2 d\tau + \int_0^t E\operatorname{tr}\Pi_n\big(A(\xi(\tau)) - A(\xi_n(\tau))\big) \times \\ & \times \big(A^*(\xi(\tau)) - A^*(\xi_n(\tau))\big)\Pi_n\, d\tau + t\int_0^t E|\Pi_n(b(\xi(\tau)) - b(\xi_n(\tau)))|^2 d\tau\Big] \le \\ & \le c\int_0^t E|\xi_n(\tau) - \eta_n(\tau)|^2 d\tau + c\int E|\xi_n(\tau) - \xi(\tau)|^2 d\tau \le c\int E|\xi_n(\tau) - \eta_n(\tau)|^2 + ct\varepsilon_n, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_n \to 0$, и согласно лемме Гроноулла

$$E|\xi_n(\tau) - \eta_n(\tau)|^2 < c_1 t\varepsilon_n, \quad 0 \le t \le T.$$

Результат леммы позволяет применить критерий равномерной интегрируемости [7] для установления абсолютной непрерывности бесконечномерных распределений — диффузионных мер в гильбертовом пространстве. Пусть процесс $\tilde\xi(t)$ задан уравнением Ито

$$\tilde\xi(t) = x + \int_0^t \tilde A\big(\tilde\xi(\tau)\big)\, dW(\tau) + \int_0^t \tilde b\big(\tilde\xi(\tau)\big)\, d\tau, \tag{1a}$$

$\tilde P(t, x, \Gamma)$ — его переходная вероятность, а $\tilde\eta_n(t)$ — последовательность аппроксимирующих диффузионных процессов в $\Pi_n H$ с переходными вероятностями

$$\tilde P_n(t, \Pi_n x, \Delta_n) = \int_{\Delta_n} \tilde p_n(t, \Pi_n x, y_n)\, dy_n, \quad x_n = \Pi_n x,$$

где p_n — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Pi_n \tilde{A}^*(x_n) A(x_n)\Pi_n u'' + \left\langle \Pi_n \tilde{b}(x_n), u' \right\rangle.$$

Будем рассматривать (1a) как возмущенное уравнение (1), полагая $\tilde{A}(x) = (I + D(x))A(x)$, $D(x)$ — ядерный оператор.

Задача состоит в определении условий на возмущение $D(x)$, при которых меры P и $\tilde{P}$ эквивалентны. Положим

$$H(x) = I - (I + D^*(x))^{-1}(I + D(x))^{-1}$$

и рассмотрим две метризации пространства $\Pi_n H$, порожденные метрическими тензорами

$$G_n(x_n) = \left(\Pi_n A^*(x_n) A(x_n)\Pi_n\right)^{-1}, \qquad \tilde{G}_n(x_n) = \left(\Pi_n \tilde{A}(x_n)\tilde{A}(x_n)\Pi_n\right)^{-1}$$

с метриками ρ, d и геодезическими $\gamma(s)$ и $\varphi(s)$ соответственно.

Теорема. *Пусть диффузионные операторы $A(x)$ и $\tilde{A}(x)$ удовлетворяют условиям $1-3$, а метрические тензоры $G_n(x)$ и $\tilde{G}_n(x)$ — условию 4. Если выполняются условия:*

1) $H(x) \le \delta I, \quad \delta < 1,$

2) $\rho^2(x,y) - d^2(x,y) \le \rho^2(x,y)(N(x)\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)),$

где оператор $0 < N(x) \le \delta_1 I$, $\delta_1 < 1$, $\operatorname{tr} N(x) < c$, c не зависит от размерности, $\dot{\gamma}(0)$ — единичный касательный вектор к геодезической γ, то мера $\tilde{P}(t, x, \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры $P(t, x, \cdot)$ для всех $t > 0$, $x \in H$.

Доказательство. В работах [5, 6] для отношения плотностей при каждом n получена оценка

$$\frac{\tilde{p}(t,x,y)}{p(t,x,y)} \le \exp\left\{kt + b(x,y) + \frac{\rho^2(x,y) - d^2(x,y)}{2t}\right\}\sqrt{\det(I - \Pi_n H(\Pi_n y)\Pi_n)},$$

де функция $b(x,y)$ такова, что

$$\int\limits_{R^n} \exp\{\alpha b(x,y)\}\, p(t,x,y)\,dy < c \quad \text{для всех } n,\ \alpha > 1.$$

Условия теоремы гарантируют ограниченность определителя и равномерную интегрируемость отношения $\tilde{p}/p$ относительно меры $P_n(t, x_n, dy_n)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. В случае постоянных A и $\tilde{A}$ меры P и $\tilde{P}$ оказываются гауссовыми, ρ и d представляют собой квадратичные формы и из условий теоремы следует известный результат Гаека – Фельдмана об абсолютной непрерывности гауссовых мер.

1. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, вып. 4. – С. 3 – 54.
2. *Белопольская Я. Н., Далецкий Ю. Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Выща шк., 1989. – 295 с.
3. *Varadhan S. R. S.* On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients // Communs Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**, № 2. – P. 431 – 455.
4. *Григорьян А. А.* Стохастически полные многообразия и суммируемые гармонические функции // Изв. АН СССР. Математика. – 1988. – **52**, № 5. – С. 1102 – 1108.
5. *Bondarenko V.* Diffusion sur varie'te' de courbure non positive // C. r. Acad. sci. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.
6. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1129 – 1136.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.

Получено 18.09.97