УДК 512.54

В. И. Сенашов (Выч. центр СО РАН, Красноярск, Россия)

ПОЧТИ СЛОЙНАЯ КОНЕЧНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ БЕЗ ИНВОЛЮЦИЙ *

We prove a theorem which characterizes a class of almost layer finite groups in the class of periodic groups without involutions: If a normalizer of any nontrivial finite subgroup belonging to a periodic conjugate biprimitive finite group without involutions is almost layer finite, then the group itself is almost layer finite.

Доведено теорему, що характеризує в класі періодичних груп без інволюцій клас майже шарово скінченних груп: якщо в періодичній спряжено бипримітивно скінченній групі без інволюцій нормалізатор будь-якої нетривіальної скінченної підгрупи майже шарово скінченний, то й сама група майже шарово скінченна.

Слойно конечные группы появились сначала без названия в работе С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих работах за ними закрепилось название слойно конечных групп. Напомним, что группа называется слойно конечной, если множество ее элементов данного порядка конечно. Почти слойно конечные группы — конечные расширения слойно конечных групп.

В работе изучаются периодические группы без инволюций со следующим условием: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен. Класс групп с таким условием весьма широк, этому условию удовлетворяют свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [2] и группа, построенная А. Ю. Ольшанским [3].

В работе показано, что при условии сопряженно бипримитивной конечности такая группа становится почти слойно конечной. Напомним, что группа G удовлетворяет условию *сопряженно бипримитивной конечности*, если для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Таким образом, решается классический вопрос [4]: как свойства системы подгрупп влияют на строение всей группы? Одновременно основной результат работы решает и другую задачу — изучение класса периодических сопряженно бипримитивных конечных групп. В последнее время этот класс групп получил название периодические группы Шункова [5] и интенсивно изучается А. И. Созутовым, А. К. Шлепкиным, А. В. Рожковым, L. Hammoudi. Важность результата данной работы подчеркивает недавно найденный L. Hammoudi пример простой бесконечной p-группы, являющейся сопряженно бипримитивно конечной (как известно, бесконечная почти слойно конечная группа не проста).

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть G — периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то и сама группа G почти слойно конечна.*

Данная теорема обобщает основной результат из работы [6].

Условие сопряженно бипримитивной конечности в этой теореме опустить нельзя ввиду примеров групп Новикова – Адяна и Ольшанского.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм. Предположим, что теорема неверна и G — группа-контрпример.

Лемма 1. *Силовские p-подгруппы в G черниковские, в частности G не является p-группой.*

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00400).

Доказательство. Пусть P — p-подгруппа группы G. Среди ее элементарных абелевых подгрупп, очевидно, найдется максимальная подгруппа R. Бесконечной группа R быть не может ввиду условий теоремы. Следовательно, любая абелева подгруппа из P имеет конечный нижний слой. В этом случае абелевы подгруппы удовлетворяют условию минимальности [4], а так как P сопряженно бипримитивно конечна, то она является черниковской группой [7]. Если же G является p-группой, то согласно только что доказанному она должна быть черниковской группой, что невозможно ввиду выбора контрпримера. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. *Группа G не имеет неединичного локально конечного радикала.*

Доказательство. Если локально конечный радикал группы G неединичен, то он почти слойно конечен согласно условию теоремы и теореме Шункова из [8]. Следовательно, в нем найдется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы почти слойно конечен. Получили противоречие с выбором контрпримера. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F, M — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, $R(F)$ и $R(M)$ — их слойно конечные радикалы. Тогда $R(F) \cap R(M) = 1$.*

Утверждение леммы доказываем, в точности повторяя схему доказательства леммы 5 из [6].

Поскольку всякая сопряженно бипримитивно конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской [7], то все абелевы подгруппы группы G не могут быть черниковскими, так как в этом случае сама группа G была бы черниковской и, значит, почти слойно конечной. Следовательно, в группе G имеется собственная нечерниковская почти слойно конечная подгруппа. Согласно лемме Цорна и теореме Шункова из [8] среди всех собственных нечерниковских почти слойно конечных подгрупп группы G найдется максимальная. Обозначим эту подгруппу через H.

Лемма 4. *Если для некоторого элемента a пересечение $C_G(a) \cap H$ бесконечно, то $C_G(a)$ содержится в H.*

Доказательство полностью совпадает с доказательством леммы 7 из [6].

Лемма 5. *Подгруппа H почти нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что централизаторы всех элементов простых порядков из H бесконечны в H.

Пусть a — некоторый элемент простого порядка из H. Группа $L_s = \mathrm{гр}(a, s^{-1}as)$ конечна для любого элемента $s \in G \setminus H$ ввиду сопряженно бипримитивной конечности группы G. Обозначим пересечение $L_s \cap H$ через H_s и предположим, что $H_s \cap H_s^q$ содержит неединичный элемент b простого порядка для некоторого элемента g из $L_s \cap H_s$. Очевидно, что элемент b попадет в H и согласно предположению и лемме 4 $C_G(b) \leq H$.

В то же время $b \in H_s^q$ и, значит, $b \in H^g$. Аналогично получаем $C_G(b) \leq g^{-1}Hg$. Тогда $C_G(b) \leq H \cap g^{-1}Hg$ и подгруппа $C = C_G(b)$ содержится в пересечении подгрупп H и H^g.

Поскольку группы H и H^g почти слойно конечны, то индексы $|C : C \cap R(H)|$, $|C : C \cap R(H^g)|$ конечны. Тогда $R(H) \cap R(H^g)$ имеет неединичный элемент. Согласно лемме 3 имеем $H = H^g$ вопреки выбору элемента g. Противоречие означает, что L_s, H_s составляют пару Фробениуса, и сама группа L_s является группой Фробениуса с ядром F_s и дополнением H_s, содержащим a.

Согласно свойствам групп Фробениуса элемент a^s сопряжен с a с помощью некоторого элемента f из F. Следовательно, $L_s = \text{гр}(a, s^{-1}as) = \text{гр}(a, f^{-1}af) = \text{гр}(a, f)$, откуда видим, что $L_s = F_s \leftthreetimes (a)$, т. е. подгруппа (a) является неинвариантным множителем группы Фробениуса L_s.

По признаку непростоты для бесконечных групп [9] (см. также [10]) $G = F \leftthreetimes N_G((a))$ и $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с нетривиальным ядром F и дополнением (a). Применяя к группе F лемму 4.6 из [11], получаем ее локальную конечность ввиду условий теоремы. Однако согласно лемме 2 группа G не имеет нетривиального локально конечного радикала.

Теперь справедливость леммы очевидным образом вытекает из того, что периодическая почти локально разрешимая группа, имеющая элемент простого порядка с конечным централизатором, почти нильпотентна [12]. Лемма доказана.

Зафиксируем обозначение. *Ввиду строения нечерниковской почти слойно конечной группы H будем считать, не нарушая общности рассуждений, что простое число p выбрано так, что оно не делит индексы $|H : R(H)|$ и $|H : L(H)|$, где $R(H)$ — слойно конечный радикал, а $L(H)$ — нильпотентный радикал группы H. Также ввиду леммы 12 из [6] будем полагать, что централизатор элемента a порядка p в H бесконечен, а в нем нет элементов с конечными централизаторами в H.*

Лемма 6. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что силовские p-подгруппы в $L_g = \text{гр}(a, a^g)$, $g \in G \setminus H$, — циклические.*

Повторяя доказательство леммы 13 из [6], получаем утверждение леммы.

Пользуясь случаем, отметим, что в предпоследнем предложении доказательства леммы 13 из [6] имеется неточность, а именно, вместо слов: „для любых $g \in G \setminus H$" следует читать: „для некоторого элемента $g \in G \setminus H$", что, однако, не мешает получению противоречия в следующем предложении этого доказательства.

Лемма 7. *Для любого элемента $g \in G \setminus H$ группа вида $L_g = \text{гр}(a, a^g)$ не содержится в H.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и нашелся такой элемент $g \in G \setminus H$, что $L_g = \text{гр}(a, a^g) < H$. Тогда согласно выбору элемента a элементы a, a^g содержатся в слойно конечном радикале группы H и централизаторы $C_H(a)$ и $C_H(a^g)$ бесконечны. Тогда бесконечен и централизатор $C_{H^{g^{-1}}}(a)$. Согласно лемме 3 $H = H^{g^{-1}}$. Получили противоречие с выбором элемента g. Лемма доказана.

Лемма 8. *Множество классов сопряженных элементарных абелевых подгрупп из H с конечными централизаторами в H конечно.*

Доказательство. Ввиду того, что в слойно конечной группе централизатор любого элемента имеет конечный индекс, нам достаточно рассмотреть только элементарные абелевы q-подгруппы для $q \in \pi = \pi(H \setminus R(H))$. Поскольку π — конечное множество, а порядки элементарных абелевых q-подгрупп из H не могут расти неограниченно для каждого q из π, имеем только конечное число вариантов для порядков таких групп.

Теперь получим утверждение леммы, доказав, что в H существует лишь конечное число несопряженных элементарных абелевых q-подгрупп заданного порядка k.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ — множество всех элементарных абелевых подгрупп порядка k из H. Включим подгруппу L_n в силовскую q-подгруппу Q_n из H. Поскольку согласно лемме 1 силовские примарные подгруппы в H черниковские и в локально конечной группе с черниковскими примарными подгруппами силовские p-подгруппы сопряжены [13], то все силовские q-подгруппы $Q_1, Q_2, \ldots$ сопряжены в H. Учитывая, что в черниковской группе имеется лишь конечное число классов сопряженных конечных разрешимых подгрупп заданного порядка (это показано в [14]), получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

В дополнение к выбору числа p согласно лемме 8 можем считать, что оно не делит порядки элементов из множества $\bigcup_{\pi} (C_H(K))$, где K пробегает все элементарные абелевы подгруппы из H, имеющие в H конечные централизаторы (это множество по лемме 8 конечно, а $\pi(H)$ бесконечно по выбору H).

Доказательство теоремы. В силу леммы 6 считаем, не нарушая общности рассуждений, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такого, что силовская p-подгруппа в $L_g = \text{гр}(a, a^g)$, $g \in G \setminus H$, — циклическая. Рассмотрим фактор-группу $L_g / O_{p'}(L_g)$. Очевидно, она имеет порядок p и, следовательно, $L_g = O_{p'}(L_g) \leftthreetimes (a)$.

Если для всех $g \in G \setminus H$ элемент a действует регулярно на нильпотентном радикале N_g группы $L_g = \text{гр}(a, a^g)$, то согласно лемме 4.3 из [12] он действует регулярно на $O_{p'}(L_g)$. В этом случае все L_g являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем (a). По признаку непростоты для бесконечных групп из [9] (см. также [10]) и лемме 4.6 из [12] G имеет нетривиальную нормальную нильпотентную и, значит, ввиду условий теоремы локально конечную подгруппу вопреки лемме 2.

Значит, остается предположить, что для некоторого элемента $g \in G$ в группе $L_g = \text{гр}(a, a^g)$ элемент a перестановочен с некоторым неединичным элементом b из нильпотентного радикала N_g группы L_g. Рассмотрим пересечение $D_g = N_g \cap H$. Поскольку $b \in D_g$, то это пересечение нетривиально.

Как и в лемме 13 из [6], покажем, что из $D_g \leftthreetimes (a) < H$ вытекает $D_g \times (a)$. Нильпотентная группа D_g очевидно содержит нетривиальную нормальную элементарную абелеву подгруппу A_g. Группа A_g имеет бесконечный централизатор в группе H по выбору элемента a. Отсюда в силу леммы 3 $C_G(A_g) \leq H$. Включим нормализатор подгруппы A_g в максимальную почти слойно конечную подгруппу W группы G. Ввиду того, что пересечение $H \cap W$ содержит бесконечную подгруппу $C_H(A_g)$ согласно лемме 3 имеем $H = W$. Отсюда следует включение $N_G(A_g) \leq H$ и, значит, $N_G(D_g) \leq H$. Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному лежит в H. Противоречие с построением D_g.

Если же $N_g = D_g$, то ввиду нормальности N_g в L_g и включения $N_G(D_g) \leq$ $\leq H$ получаем $L_g < H$ вопреки лемме 7. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71–74.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 448 с.

4. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. *Шлепкин А. К.* О группах Шункова, насыщенных группами $L_3(p^n)$ // Тез. докл. Междунар. конф. „Всесибирские чтения по математике и механике" (17–20 июня, 1997). – Томск: Том. ун-т, 1997. – С. 48.
6. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 1002–1008.
7. *Сучкова Н. Г., Шунков В. П.* О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1986. – **26**, № 6. – С. 445–469.
8. *Шунков В. П.* Характеризация почти слойно конечных групп в классе локально конечных групп // Теория групп. – Красноярск, 1996. – С. 25–32. – (Препринт / ВЦ СО РАН, № 14).
9. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 6. – С. 711–735; 1979. – **18**, № 2. – С. 206–223.
10. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
11. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 133 с.
12. *Хухро Е. И.* Нильпотентные периодические группы с почти регулярным автоморфизмом простого порядка // Алгебра и логика. – 1987. – **26**, № 4. – С. 502–517.
13. *Шунков В. П.* О локально конечных группах конечного ранга // Там же. – 1971. – **10**, № 12. – С. 199–225.
14. *Черников Н. С.* О бесконечных простых локально конечных группах. – Киев, 1982. – С. 3–20. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.37).

Получено 17.06.97,
после доработки — 14.11.97