УДК 517.537.72

О. М. Мулява (Дрогоб. пед. ін-т)

ПРО КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

We establish conditions on coefficients of the Dirichlet series under which this series belong to certain convergence class.

Встановлено умови на коефіцієнти ряду Діріхле, при яких цей ряд належить до деякого класу збіжності.

1. Вступ. Ж. Валірон [1, с. 18] показав, що якщо ціла функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має порядок $\rho \in (0, \infty)$ і належить до класу збіжності, тобто $\int_1^{\infty} \ln M_f(r) / (r^{\rho+1}) dr < +\infty$, $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty$.

П. Камсен [2] узагальнив цей результат для випадку цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s \lambda_n\}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n. Він показав, що якщо

$$0 < h \le \lambda_{n+1} - \lambda_n \le H < +\infty, \qquad n \ge 0, \tag{2}$$

і

$$\varkappa_n(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow +\infty, \quad n \to \infty,$$

то для того, щоб

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho\sigma} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty, \qquad M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}, \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \tag{4}$$

Ю. М. Галь і М. М. Шеремета [3] перенесли результат Камсена на ряди Діріхле, абсолютно збіжні в півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < 0\}$. Вони показали, що якщо ряд Діріхле має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$ і виконується умова (2), то для того, щоб

$$\int_{-1}^{0} |\sigma|^{p^0 - 1} \ln^+ M(\sigma, F) d\sigma < +\infty, \qquad 0 < p^0 < +\infty, \tag{5}$$

необхідно, а у випадку, коли $\varkappa_n(F) \uparrow 0$, $n \to \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^+|a_n|}{\lambda_n} \right)^{p^0+1} < +\infty. \tag{6}$$

Виникає природне питання, як зміняться співвідношення (4) і (6), якщо умова (2) не виконується. Щоб дати відповідь на це питання, нам буде потрібне певне уточнення нерівності Харді [4, с. 289] і оцінки $M(\sigma, F)$ через максимальний член $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ ряду (1).

2. Узагальнення нерівності Харді. Нехай $p > 1$ і $q = p/(p-1)$, а f — додатна на (A, B) функція, $-\infty \leq A < B \leq +\infty$. Нехай (λ_n^*) — послідовність додатних чисел, а (a_n) — послідовність чисел із (A, B). Тоді

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1^* a_1 + \ldots + \lambda_n^* a_n}{\lambda_1^* + \ldots + \lambda_n^*} \in (A, B).$$

Лема 1. *Якщо функція* $f^{1/p}$ *опукла на* (A, B), *а послідовність* (μ_n) *додатна і незростаюча, то для кожного* $\omega \leq +\infty$ *виконується нерівність*

$$\sum_{n=1}^{\omega} \mu_n \lambda_n^* f(A_n) \leq q^p \sum_{n=1}^{\omega} \mu_n \lambda_n^* f(a_n). \tag{7}$$

Доведення. Використаємо методику з [4]. Позначимо $t_n = \lambda_1^* + \ldots + \lambda_n^*$, $n \geq 1$. Тоді

$$A_n = \frac{\lambda_1^* a_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^* a_{n-1}}{t_n} + \frac{\lambda_n^* a_n}{t_n} = \frac{t_{n-1}}{t_n} A_{n-1} + \frac{\lambda_n^*}{t_n} a_n,$$

і оскільки $t_{n-1}/t_n + \lambda_n^*/t_n = 1$, а функція $f^{1/p}$ опукла, то

$$f^{1/p}(A_n) \leq \frac{t_{n-1}}{t_n} f^{1/p}(A_{n-1}) + \frac{\lambda_n^*}{t_n} f^{1/p}(a_n),$$

звідки

$$-f^{1/p}(a_n) \leq \frac{t_{n-1}}{\lambda_n^*} f^{1/p}(A_{n-1}) - \frac{t_n}{\lambda_n^*} f^{1/p}(A_n).$$

Тому, враховуючи рівність $1/p + 1/q = 1$, маємо

$$Q_n \overset{\text{def}}{=} \lambda_n^* f(A_n) - q\lambda_n^* f^{1/p}(a_n) f^{1/q}(A_n) \leq$$

$$\leq \lambda_n^* f(A_n) + q\lambda_n^* \left(\frac{t_{n-1}}{\lambda_n^*} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}) - \frac{t_n}{\lambda_n^*} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_n) \right) =$$

$$= \lambda_n^* f(A_n) - q t_n f(A_n) + q t_{n-1} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}) =$$

$$= (\lambda_n^* - q t_n) f(A_n) + q t_{n-1} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}). \tag{8}$$

Розглянемо на $[0, +\infty)$ функцію $u(x) = \frac{1}{p} x^p - a x + \frac{1}{q} a^q$, де a — будь-яке невід'ємне число. Ця функція має єдину точку мінімуму $x = x(a) = a^{1/(p-1)}$, а $u(x(a)) = 0$. Звідси випливає, що для всіх $a \geq 0$ і $x \geq 0$ справедлива нерівність $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} a^q \geq a x$. Тому з (8) маємо $Q_1 = -(q-1)\lambda_1^* f(A_1)$ і

$$Q_n \le \left(\lambda_n^* - q t_n\right) f(A_n) + q t_{n-1}\left(\frac{1}{p} f\left(A_{n-1}\right) + \frac{1}{q} f\left(A_n\right)\right) =$$

$$= \left(\lambda_n^* + t_{n-1} - q t_n\right) f(A_n) + \frac{q}{p} t_{n-1} f\left(A_{n-1}\right) = (1-q)\, t_n f(A_n) + \frac{q}{p} t_{n-1} f\left(A_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(t_{n-1} f\left(A_{n-1}\right) - t_n f(A_n)\right), \quad n \ge 2,$$

а оскільки послідовність μ_n незростаюча, то при $N < +\infty$ виконується

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n Q_n \le \frac{1}{p-1} \sum_{n=2}^{N} \mu_n \left(t_{n-1} f\left(A_{n-1}\right) - t_n f(A_n)\right) + \mu_1 Q_1 =$$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{n=2}^{N-1} \left(\mu_n - \mu_{n-1}\right) t_n f(A_n) - \mu_N t_N f(A_N) < 0.$$

На підставі означення Q_n і нерівності Гельдера звідси отримуємо

$$\sum_{n=1}^{N} \mu_n \lambda_n^* f(A_n) \le q \sum_{n=1}^{N} \mu_n \lambda_n^* f^{1/p}(a_n)\, f^{1/q}(A_n) =$$

$$= q \sum_{n=1}^{N} \left(\mu_n \lambda_n^* f(a_n)\right)^{1/p} \left(\mu_n \lambda_n^* f(A_n)\right)^{1/q} \le q \left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \lambda_n^* f(a_n)\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} \mu_n \lambda_n^* f(A_n)\right)^{1/q}.$$

Якщо тепер розділимо нерівність на останній множник і піднесемо до степеня p, то отримаємо нерівність (8) для $\omega = N$, а завдяки довільності N нерівність (8) доведено для всіх ω.

При $\lambda_n^* = 1$, $\mu_n = 1$ $(n \ge 1)$ і $f(x) = x^p$ з (8) випливає нерівність Харді

$$\sum_{n=1}^{\omega} A_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\omega} a_n^p,$$

де $p > 1$, $a \ge 0$ і $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) > 0$.

3. Оцінки максимуму модуля. Насамперед зауважимо справедливість [6, с. 184] нерівності Коші $\mu(\sigma) \le M(\sigma)$ для всіх $\sigma < \sigma_a$ які б не були показники λ_n, де σ_a — абсциса абсолютної збіжності ряду (1). Справедлива також така лема.

Лема 2. *Якщо* $\sigma_a = +\infty$ *і* $\ln n \le (\tau + o(1))\lambda_n$, $n \to \infty$, *то* $M(\sigma) \le \mu(\sigma + \tau_0 + \varepsilon)$ *для кожного* $\varepsilon > 0$ *і всіх* $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$.

Нехай Ω — клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією. Через φ позначимо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(x) = x - \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)}$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [7; 8, с. 18] функції φ і Ψ є неперервними і зростаючими до $+\infty$.

Лема 3. *Нехай* $\sigma_a = +\infty$, $\Phi \in \Omega$ *і* $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \ge \sigma_0$. *Тоді якщо*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} \le \beta_0 < 1, \tag{9}$$

то для кожного $\varepsilon \in (0, 1-\beta_0)$ *і всіх* $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$

$$M(\sigma) \le A(\varepsilon)\,\mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta_0-\varepsilon}\right), \quad A(\varepsilon) = \text{const}. \tag{10}$$

Дійсно [9; 8, с. 23], якщо $\sigma_a = +\infty$ і

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{-\ln|a_n|} \le h_0 < 1, \tag{11}$$

то для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h_0)$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$

$$M(\sigma) \le A(\varepsilon)\,\mu\left(\frac{\sigma}{1-h_0-\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Але [7; 8, с. 18] для того, щоб $\ln\mu(\sigma, F) < \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln|a_n| < -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$. Тому з нерівностей (9) і $\ln\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ випливає (11) з $h_0 = \beta_0$, а отже, з (12) випливає (10). Лему 3 доведено.

У випадку, коли $\sigma_a = 0$ (зауважимо, що загальний випадок $\sigma_a \in \mathbb{R}$ зводиться до випадку $\sigma_a = 0$ заміною s на $s - \sigma_a$), будемо використовувати наступну лему.

Лема 4. *Нехай* $\sigma_a = 0$ *а послідовність* (λ_n) *задовольняє умову*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} \le h_0 < +\infty, \tag{13}$$

де γ *— додатна неперервна спадна до 0 на* $[0, +\infty)$ *функція така, що функція* $t\gamma(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $K(\varepsilon) > 0$ *така, що для всіх* $\sigma < 0$

$$M(\sigma) \le \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2\left(h_0+\varepsilon^2\right)}\right)\right\} + K(\varepsilon)\right). \tag{14}$$

Доведення. Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n). Тоді з (13) випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ при $t \ge t_0 = t_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність $\ln n(t) \le h t \gamma(t)$, де $h = h_0 + \varepsilon^2$. Тому, переходячи до інтеграла Стільтьєса та інтегруючи частинами, маємо

$$\frac{M(\sigma)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|\exp\left(\lambda_n \frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} \exp\left\{-\lambda_n \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\right\} \le \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\lambda_n\right\} =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}t\right\} dn(t) \le \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\int_0^{\infty} n(t)\exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}t\right\} dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} - h\gamma(t)\right)\right\} dt + K_1(\varepsilon), \tag{15}$$

де $K_1(\varepsilon)\equiv \mathrm{const}>0$. Оскільки функція γ^{-1} спадна на $(0,\gamma(0))$ і $\gamma^{-1}(x)\uparrow+\infty$ при $x\downarrow 0$, то $t(\sigma)=\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\uparrow+\infty$, $\sigma\uparrow 0$, так що $t(\sigma)\geq t_0$ при $\sigma\geq$ $\geq\sigma_0(\varepsilon)$. Тому, завдяки неспаданню $t\gamma(t)$,

$$\int_{t_0}^{t(\sigma)}\exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}-h\gamma(t)\right)\right\}dt \leq \int_{t_0}^{t(\sigma)}\exp\{th\gamma(t)\}dt \leq t(\sigma)\exp\{ht(\sigma)\gamma(t(\sigma))\} =$$

$$= \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\right\}, \tag{16}$$

а

$$\int_{t(\sigma)}^{\infty}\exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}-h\gamma(t)\right)\right\}dt \leq \int_{t(\sigma)}^{\infty}\exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}-h\gamma(t(\sigma))\right)\right\}dt =$$

$$= \int_{t(\sigma)}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2}t\right\}dt = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2|\sigma|}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2|\sigma|t(\sigma)}{(1+\varepsilon)^2}\right\} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2|\sigma|}. \tag{17}$$

З нерівностей (15) – (17) при $\sigma\geq\sigma_0(\varepsilon)$ маємо

$$\frac{M(\sigma)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} \leq \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\right\} +$$

$$+(1+\varepsilon)/\varepsilon + K_1(\varepsilon),$$

звідки, завдяки тому, що $x\gamma(x)\uparrow+\infty$, $x\to\infty$, тобто $|\sigma|\gamma^{-1}(|\sigma|)\uparrow+\infty$, $\sigma\uparrow 0$, отримуємо (14) з сталою $K(\varepsilon)\geq(1+\varepsilon)/\varepsilon+K_1(\varepsilon)$.

Нам буде потрібна також наступна лема.

Лема 5. *Нехай* $\sigma_a=0$ *і* $\ln n(t)\leq q\ln t$ *при* $t\geq t_0$. *Тоді при* $\sigma\uparrow 0$

$$\ln M(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma) + q\left(\ln\frac{1}{|\sigma|}+\ln^+\ln\frac{\mu(\sigma/2)}{\mu(3\sigma/4)}\right)+O(1). \tag{18}$$

Доведення цієї леми таке ж, як аналогічної леми з [7] для цілих функцій. З ним можна ознайомитись в [10].

4. Основна теорема. Основний результат подамо в термінах максимального члена і коефіцієнтів мажоранти Ньютона. Надалі будемо вважати, що $\mu(\sigma,F)\to+\infty$, $\sigma\uparrow\sigma_a$. Для цілих рядів Діріхле це виконується завжди, а якщо $\sigma_a=0$, то $\mu(\sigma,F)\to+\infty$, $\sigma\uparrow 0$, тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів a_n необмежена (загальний випадок $\sigma_a\in\mathbb{R}$ зводиться до випадку $\sigma_a=0$ заміною s на $s-\sigma_a$). Тоді діаграма Ньютона (для цілих рядів побудована в [6, с. 180 – 183], а для ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності будується аналогічно) складається з нескінченної кількості ребер, а коефіцієнти a_n^0 мажоранти Ньютона F_0 ряду Діріхле (1) такі, що $|a_n|\leq a_n^0$ і послідовність $\varkappa_n^0=(\ln|a_n^0|-\ln|a_{n+1}^0|)/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ є неспадною. Крім цього, $\mu(\sigma,F)=\mu(\sigma,F_0)$ і $\nu(\sigma,F)=\nu(\sigma,F_0)$, де $\nu(\sigma,F)=\max\{n\geq 0:$ $|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma,F)\}$ — центральний індекс ряду (1).

Теорема 1. *Нехай ряд* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$ *і*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \sigma_a, \tag{19}$$

а β — *додатна неперервна неспадна на* $[a, A)$ *функція така, що інтеграли*

$$\int_a^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}, \quad \int_a^A \frac{\sigma\, d\sigma}{\beta(\sigma)} \tag{20}$$

збіжні. Тоді для того щоб

$$\int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma)}{\beta(\sigma)} d\sigma < +\infty, \tag{21}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right) < +\infty, \quad B(x) = \int_x^A \frac{\sigma - x}{\beta(\sigma)} d\sigma. \tag{22}$$

Доведення. З умови (19), яка для цілих рядів Діріхле виконується завжди, неважко отримати, що $\varkappa_n^0 \to \sigma_a$, $n \to \infty$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a_0 = a_0^0 = 1$. Тоді $\varkappa_0^0 = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{1}{a_1^0}$ і знову, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varkappa_0^0 \ge a$, тому що в протилежному випадку можна належним чином доозначити функцію β.

Використовуючи рівність [6, с. 184; 8, с. 17]

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)}\, dt, \quad -\infty < \sigma_0 \le \sigma < \sigma_a,$$

маємо

$$\int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\beta(\sigma)} d\sigma = \int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma, F_0)}{\beta(\sigma)} d\sigma = \int_a^A \frac{1}{\beta(\sigma)} \left(\int_a^{\sigma} \lambda_{\nu(t)}\, dt + K_1 \right) d\sigma =$$

$$= \int_a^A \lambda_{\nu(t)} \int_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} dt + K_2 = \int_a^A \lambda_{\nu(t)} \beta_1(t)\, dt + K_2, \quad \beta_1(t) = \int_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)},$$

де $\nu(t) = \nu(t, F) = \nu(t, F_0)$, а через K_j тут і далі позначаються сталі. Зрозуміло, що β_1 — спадна до 0 функція. Добре відомо [8, с. 19], що якщо $\varkappa_{n-1}^0 < \varkappa_n^0$, то $\nu(t) = n$ при $\varkappa_{n-1}^0 \le t < \varkappa_n^0$. Тому

$$\int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma)}{\beta(\sigma)} d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_{\varkappa_{n-1}^0}^{\varkappa_n^0} \beta_1(t)\, dt + K_2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(B(\varkappa_{n-1}^0) - B(\varkappa_n^0) \right) + K_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B(\varkappa_{n-1}^0) + K_3, \tag{23}$$

де

$$B(x) = \int\limits_x^A \beta_1(t)\,dt = \int\limits_x^A \int\limits_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}\,dt = \int\limits_x^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} \int\limits_x^\sigma dt = \int\limits_x^A \frac{\sigma - x}{\beta(\sigma)}\,d\sigma.$$

Покладемо $B_1(x) = \sqrt{B(x)}$. Тоді $B_1'(x) = \frac{1}{2}B(x)^{-1/2}B'(x)$ і

$$B_1''(x) = \frac{1}{2}B^{-3/2}(x)\left(-\int\limits_x^A \beta_1(t)\,dt\,\beta_1'(x) - \frac{1}{2}\beta_1^2(x)\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}B^{-3/2}(x)\left(-\int\limits_x^A \beta_1(t)\,\beta_1'(t)\,dt - \frac{1}{2}\beta_1^2(x)\right) = 0,$$

тому що $\beta_1'(x) = -1/\beta(x)$ — спадна функція. Отже, функція $B^{1/2}$ опукла на $[a, A)$.

Далі, $\ln a_n^0 = -\varkappa_{n-1}^0(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \ldots - \varkappa_0^0(\lambda_1 - \lambda_0)$, тобто

$$\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0} = \frac{\varkappa_0^0\lambda_1^* + \ldots + \varkappa_{n-1}^0\lambda_n^*}{\lambda_1^* + \ldots + \lambda_n^*}, \quad \lambda_n^* = \lambda_n - \lambda_{n-1}.$$

Тому якщо візьмемо в лемі 1 $f(x) = B(x)$, $p = 2$ і $\mu_n = 1$, $n \geq 1$, то матимемо

$$\sum_{n=1}^{\omega}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,B\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right) \leq 4\sum_{n=1}^{\omega}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,B(\varkappa_{n-1}^0).$$

З іншого боку, $\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0} \leq \varkappa_{n-1}^0$, і оскільки функція B спадна, то

$$\sum_{n=1}^{\omega}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,B\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right) \geq \sum_{n=1}^{\omega}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,B(\varkappa_{n-1}^0).$$

Тому з (23) випливає, що (21) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (22). Теорему 1 доведено.

Комбінуючи теорему 1 з наведеними в п. 3 результатами, можна тепер отримати ряд тверджень про належність рядів Діріхле тому чи іншому класові збіжності. Нижче зупинимось тільки на випадках рядів Діріхле скінченних R-порядку і логарифмічного R-порядку.

5. Цілі ряди Діріхле. R-порядком ρ і логарифмічним R-порядком p цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}, \quad p \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\ln\sigma}.$$

Теорема 2. *Нехай цілий ряд Діріхле* (1) *має скінченний R-порядок $\rho > 0$ і $\ln n = O(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді для того щоб виконувалось співвідношення* (3), *необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\,|a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \tag{24}$$

Доведення. За лемою 2 і нерівністю Коші співвідношення (3) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^\infty \frac{\ln\mu(\sigma, F)}{\exp(\rho\sigma)} d\sigma < +\infty, \tag{25}$$

тобто виконується (21) з $\beta(\sigma) = \exp\{\rho\sigma\}$. У цьому випадку $B(x) = \rho^{-2}\exp\{-\rho x\}$. Як уже зазначалось, для цілих рядів Діріхле умова (19) виконується завжди, тому за теоремою 1 співвідношення (25) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \exp\left\{-\frac{\rho}{\lambda_n} \ln\frac{1}{a_n^0}\right\} < +\infty. \tag{26}$$

Але $|a_n| \le a_n^0$. Тому з (26) випливає (24). У випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, маємо $|a_n| = a_n^0$ і тому співвідношення (26) і (24) рівносильні. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай цілий ряд Діріхле* (1) *має скінченний логарифмічний* R*-порядок* $p > 1$ *і* $\ln\ln n \le (1 + o(1)) \ln\lambda_n$, $n \to \infty$. *Тоді для того щоб*

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma^{p+1}} d\sigma < +\infty, \tag{27}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ *неспадна, і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln\frac{1}{|a_n|}\right)^{1-p} < +\infty. \tag{28}$$

Доведення. З означення p і нерівності Коші випливає, що $\ln\mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$, де $\Phi(\sigma) = \sigma^{p+\varepsilon}$, $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$. Тому $x\Psi(\varphi(x)) = Kx^{(p+\varepsilon)(p+\varepsilon-1)}$, $x \ge x_0(\varepsilon)$, і, завдяки умові $\ln\ln n \le (1 + o(1)) \ln\lambda_n$, $n \to \infty$, виконується (9), а отже, за лемою 3 і (10). Звідси випливає, що (27) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_1^\infty \frac{\ln\mu(\sigma, F)}{\sigma^{p+1}} d\sigma < +\infty. \tag{29}$$

Якщо тепер візьмемо $\beta(\sigma) = \sigma^{p+1}$, то $B(x) = p^{-1}(p-1)^{-1}\sigma^{1-p}$, і за теоремою 1 співвідношення (29) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln\frac{1}{a_n^0}\right)^{1-p} < +\infty.$$

Подальше доведення теореми 3 таке ж, як і теореми 2.

6. Ряди Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. R-порядком ρ^0 і логарифмічним R-порядком p^0 абсолютно збіжного в $\{s: \operatorname{Re} s < 0\}$ ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\rho^0 \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma), \qquad p^0 \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma\to 0} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\ln(1/|\sigma|)}.$$

Теорема 4. *Нехай абсолютно збіжний в* $\{s: \operatorname{Re} s < 0\}$ *ряд Діріхле* (1) *має скінченний логарифмічний* R*-порядок* $p^0 \ge 1$ *і* $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$.

Тоді для того щоб виконувалось співвідношення (5), *необхідно, а у випадку, коли послідовність* $(\varkappa_n(F))$ *неспадна, і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\left(\frac{\ln^+|a_n|}{\lambda_n}\right)^{p^0+1} < +\infty. \tag{30}$$

Доведення. З умови $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n\to\infty$, випливає, що $\ln n < \lambda_n^{\alpha} = o(\lambda_n)$, $n_0(\alpha)\le n\to\infty$, для кожного $\alpha\in(0,1)$. Тому [6, с. 115; 8, с. 10] справедлива рівність (19) і виконується (13) з $\gamma(x)=x^{\alpha-1}$ і $h_0=1$, а за лемою 4 $\ln M(\sigma)\le \ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon)) + K_1(\varepsilon)|\sigma|^{1-1/(1-\alpha)}$, $K_1(\varepsilon)=\text{const}$, $\varepsilon>0$, для всіх $\sigma<0$, звідки

$$\int_{-1}^{0}|\sigma|^{p^0-1}\ln M(\sigma)\,d\sigma \le \int_{-1}^{0}|\sigma|^{p^0-1}\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)d\sigma + K_1(\varepsilon)\int_{-1}^{0}|\sigma|^{p^0-1/(1-\alpha)}\,d\sigma.$$

При $\alpha< p^0/(p^0+1)$ останній інтеграл в цій нерівності збіжний, а тому, з огляду на нерівність Коші, бачимо, що співвідношення (5) рівносильне співвідношенню

$$\int_{-1}^{0}|\sigma|^{p^0-1}\ln\mu(\sigma)\,d\sigma < +\infty. \tag{31}$$

Покладемо тепер $\beta(\sigma)=|\sigma|^{1-p^0}$. Тоді якщо $p^0\ge 1$, то функція β є неспадною на $(-\infty,0)$ і $B(x)=|x|^{1+p}/(p^0(p^0+1))$. Тому за теоремою 1 співвідношення (31) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\left|\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right|^{p^0+1} < +\infty. \tag{32}$$

Оскільки $\left|\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right| = \left|\frac{1}{\lambda_n}\ln a_n^0\right|$ і $\ln^+|a_n|\le \ln a_n^0$, то з (32) випливає (30). У випадку, коли послідовність $(\varkappa_n(F))$ неспадна, маємо $|a_n|=a_n^0$, і тому співвідношення (32) і (30) еквівалентні. Теорему 4 для $p^0\ge 1$ доведено.

Якщо $0<p^0<1$, функція β спадна, то ми не можемо посилатись на теорему 1. Але в цьому випадку функція $B^{1/p}$ є опуклою при $p=p^0+1$. Тому за лемою 1 справедлива теорема 1 , а з цим і теорема 4.

Теорема 5. *Нехай абсолютно збіжний в* $\{s:\operatorname{Re}s<0\}$ *ряд Діріхле* (1) *має скінченний* R*-порядок* $\rho^0>0$ *і* $\ln n = O(\ln\lambda_n)$, $n\to\infty$. *Тоді для того щоб*

$$\int_{-1}^{0}\frac{\ln M(\sigma,F)}{|\sigma|^2\exp(\rho^0/|\sigma|)}\,d\sigma < +\infty, \tag{33}$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n(F))$ *неспадна, і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})\left(\frac{\ln^+|a_n|}{\lambda_n}\right)^2\exp\left\{-\frac{\rho^0\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right\} < +\infty. \tag{34}$$

Доведення. Оскільки $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, то за лемою 5 справедлива нерівність (18) з деяким $q \in (0, +\infty)$. Але функція F має скінченний R-порядок. Тому $\ln \ln \mu(\sigma/2) = O(1/|\sigma|)$ при $\sigma \to 0$ і з (18) маємо $\ln \mu(\sigma) \leq \leq \ln M(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma) + O(1/|\sigma|)$, $\sigma \to 0$. Звідси випливає, що (33) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{-1}^{0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp(\rho^0/|\sigma|)} d\sigma < +\infty, \tag{35}$$

тобто виконується (21) з $\beta(\sigma) = |\sigma|^2 \exp(\rho^0/|\sigma|)$. Легко побачити, що функція β зростає на $[\rho^0/2, 0)$, а

$$B(x) = \frac{1+o(1)}{(\rho^0)^2} |x|^2 \exp\left\{-\frac{\rho^0}{|x|}\right\}, \quad x \to 0.$$

Тому за теоремою 1 співвідношення (35) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right|^2 \exp\left\{ -\rho^0 \left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right|^{-1} \right\} < +\infty.$$

Подальше доведення теореми 5 таке ж, як і теореми 4.

Автор висловлює щиру подяку Ю. М. Галю за цінні зауваження.

1. *Valiron G.* General theory of integral functions. – Toulouse, 1923. – 382 p.
2. *Kamthan P. K.* A theorem of step functions. II // Istambul univ. fen. fac. mecm. A. – 1963. – **28**. – P. 65–69.
3. *Галь Ю. М., Шеремета М. Н.* Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 7. – С. 11–14.
4. *Харди Г. Г., Литлвуд Д. Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
6. *Шеремета М. Н.* Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.
7. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – Київ: ІСДО, 1993. – 168 с.
8. *Винницький Б. В., Шеремета М. М.* Про коефіцієнти ряду Діріхле, що задає цілу функцію // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 2. – С. 232–237.
9. *Шеремета М. М., Притула Я. Я., Фединяк С. І.* Зростання рядів Діріхле. – Львів, 1995. – 30 с. – (Препринт / НАН України. ІППММ ім. Я. С. Підстригача; № 18–95).
10. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100–108.

Одержано 27.10.97