УДК 517.9

В. А. Добрынский (Ин-т гидробиологии НАН Украины, Киев)

О СИНХРОНИЗАЦИИ СИММЕТРИЧНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

We establish some conditions of the synchronization of dynamics of symmetrically perturbed systems with quadratic nonlinearity.

Знайдені деякі умови синхронізації динаміки симетрично збурених систем з квадратичною нелінійністю.

В последнее время в литературе широко обсуждаются эффекты, возникающие при сцеплении ряда идентичных одномерных хаотических систем, в частности вопросы синхронизации их состояний (так называемая хаотическая синхронизация) [1, 2].

Пусть $f_a\colon \tau \to f_a(\tau)$ — однопараметрическое семейство отображений прямой R^1 в себя. Сцепление пары таких отображений проводится разными способами. Обычно рассматриваются сцепленные отображения следующих трех видов:

$$(x, y) \to \big(f_a(x) + \zeta(y - x),\ f_a(y) + \zeta(x - y)\big), \tag{1}$$

$$(x, y) \to \big(f_a(x + \zeta(y - x)),\ f_a(y) + \zeta(x - y)\big), \tag{2}$$

$$(x, y) \to \big(f_a(x) + \zeta(f_a(y) - f_a(x)),\ f_a(y) + \zeta(f_a(x) - f_a(y))\big), \tag{3}$$

где $(x, y) \in R^2$. Ниже исследуются свойства указанных выше двумерных отображений с $f_a(\tau) = a\tau(1 - \tau)$, $a \in (1, 4)$, $\zeta \in (0, 1)$. Данные отображения имеют свойства симметрии (относительно замен $x \to y$, $y \to x$), вследствие чего при любых значениях параметров a и ζ имеют одномерные инвариантные многообразия в виде главной диагонали $x = y$, на которой они совпадают с f_a. Сразу отметим, что замена переменных $z = (1 - \zeta)x + \zeta y$, $t = (1 - \zeta)y + \zeta x$ преобразует (2) в (3). Поэтому в дальнейшем исследуются отображения вида (1) и (3).

Рассмотрим модель (1). Замена переменных

$$z = a(x - y), \qquad t = a(x + y - 1) \tag{4}$$

преобразует (1) к виду

$$F\colon (z, t) \to \left(-z(t + 2a\zeta),\ \frac{a(a-2)}{2} - \frac{z^2 + t^2}{2}\right). \tag{5}$$

Вычисляя матрицу Якоби DF отображения F, имеем

$$DF = \begin{pmatrix} -t - 2a\zeta & -z \\ -z & -t \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что ось $z = 0$ инвариантна относительно F и то, что DF — диагональная матрица при $z = 0$, нетрудно заметить, что любой сток одномерного отображения $\Psi_a : \tau \to \Psi_a(\tau)$, где $\Psi_a(\tau) = a(a-2)/2 - \tau^2/2$, может быть стоком отображения F. В самом деле, пусть t_0 — периодическая периода N точка Ψ_a, т. е.

$$\Psi_a^N(t_0) = t_0 \quad \text{и} \quad \prod_{j=0}^{N-1} |\Psi_a'(\Psi_a^j(t_0))| < 1,$$

где $N \geq 1$. Очевидно, что $F^N((0, t_0)) = (0, t_0)$. При этом собственные числа $D(F^N)$ в $(0, t_0)$ ввиду диагональности DF на $z = 0$ равны соответственно

$$\lambda_{||} = \prod\nolimits_{j=0}^{N-1} \Psi_a'(\Psi_a^j(t_0)) = \prod\nolimits_{j=0}^{N-1} (-t_j),$$

где $t_j = \Psi_a^j(t_0)$, и

$$\lambda_\perp = \prod\nolimits_{j=0}^{N-1} (-t_j - 2a\zeta).$$

Очевидно, существуют $\overline{\zeta}$, $\overline{\overline{\zeta}} > 0$ такие, что для любого $\zeta \in \bigcup_{j=1}^{N} (t_j - \overline{\zeta},\ t_j + \overline{\overline{\zeta}})$ $|\lambda_\perp| < 1$. Таким образом, периодические точки $(0, t_j)$ при таких ζ являются стоками отображения F. Следовательно, выбором соответствующих значений ζ любой сток Ψ_a может быть сделан стоком F.

Рассмотрим отображения (3). Замена переменных (4) преобразует (3) в отображения вида

$$\Phi\colon (z, t) \to \left(-(1-2\zeta)zt,\ a(a-2)/2 - (z^2 + t^2)/2\right). \tag{6}$$

Вычисляя матрицу Якоби $D\Phi$ отображения Φ, имеем

$$D\Phi = \begin{pmatrix} (2\zeta - 1)t & (2\zeta - 1)z \\ -z & -t \end{pmatrix}.$$

На оси $z = 0$ матрица $D\Phi$ становится диагональной, причем значения ненулевых ее элементов связаны между собой соотношением $b_{11} = (1 - 2\zeta) b_{22}$. Следовательно, ляпуновские экспоненты произвольной траектории отображения Φ на $z = 0$ связаны между собой соотношением $\lambda_\perp = \lambda_{||} + \log|1 - 2\zeta|$, где $\lambda_{||}$ — ляпуновская экспонента вдоль инвариантной прямой $z = 0$, а $\lambda_\perp$ — трансверсальная ляпуновская экспонента той же траектории.

Обозначим $I_{\alpha\beta} = (-a(a-2)/2 - \beta,\ a(a-2)/2 + \beta)$ и пусть $\Lambda_{\alpha\beta} = \bigcap_{j=0}^{\infty} \Psi_a^j(Cl(I_{\alpha\beta}))$, где $Cl(I_{\alpha\beta})$ — замыкание $I_{\alpha\beta}$, $(0, \Lambda_{\alpha\beta}) = \{(z, t)\colon z = 0,\ t \in \Lambda_{\alpha\beta}\}$, $U_{\gamma\beta} = \{(z, t)\colon -\gamma < z < \gamma,\ t \in I_{\alpha\beta}\}$. Пусть также ω_{zt} — ω-предельное множество точки (z, t).

Теорема. *Для любых* $a \in (2, 4)$, $\zeta \in (3/8, 5/8)$ *существует окрестность* $U \supset (0, \Lambda_{\alpha\beta})$ *такая, что* $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(Cl(U)) \subset Cl(0, I_{\alpha\beta})$.

***Следствие* 1.** *Для любых* $a \in (2, 4)$, $\zeta \in (3/8, 5/8)$ *существует окрестность* $U \supset (0, \Lambda_{\alpha\beta})$ *такая, что* $\omega_{zt} \subset (0, \Lambda_{\alpha\beta})$ *для любой* $(z, t) \in U$.

***Следствие* 2.** *Если* $\Lambda_{\alpha\beta}$ *— хаотический аттрактор отображения* Ψ_a, $a \in (2, 4)$, *и* $\zeta \in (3/8, 5/8)$, *то* $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ *— хаотический аттрактор отображения* Φ.

Как известно [3], существует множество $\Delta \subset (2, 4)$ положительной меры Лебега такое, что для каждого $a \in \Delta$ Ψ_a имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, т.е. для каждого такого a $\Lambda_{\alpha\beta}$ — топологически транзитивный хаотический аттрактор.

***Следствие* 3.** *Существует* $\Delta \subset (2, 4)$ *положительной меры Лебега такое, что для каждого* $a \in \Delta$ *множество* $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ *— топологически транзитивный хаотический аттрактор отображения* Φ *для каждого* $\zeta \in (3/8, 5/8)$.

Доказательство теоремы. Покажем, что существует $\overline{\beta} = \beta(a) > 0$ такое, что $\Lambda_{\alpha\overline{\beta}} \subset I_{\alpha\overline{\beta}}$.

Лема 1. *Для любого* $a \in (2, 4)$ *существует* $\overline{\beta} = \beta(a) > 0$, $\overline{\beta} < 4 - a(a-2)/2$ *такое, что* $\Psi_a(Cl(I_{\alpha\overline{\beta}})) \subset I_{\alpha\overline{\beta}}$.

Доказательство. Действительно, $\Psi_a(t) \leq \Psi_a(0) = a(a-2)/2$ для любого $t \in R^1$ и $\Psi_a(\pm a(a-2)/2) = \dfrac{a(a-2)}{2}[1 - a(a-2)/4] > -a(a-2)/2$. Обозначим $\Delta = \dfrac{a(a-2)}{2}[8 - a(a-2)]$ и зафиксируем $\overline{\beta} > 0$ так, что $\overline{\beta} < \min\{\Delta/10, 4 - a(a-2)/2\}$ и $a\overline{\beta}(a-2)/2 + \overline{\beta}^2/2 < \Delta/10$. Тогда для любого $t \in I_{\alpha\overline{\beta}}$ $\Psi_a(t) > -a(a-2)/2 + 0{,}8\Delta$. Следовательно, $\Psi_\alpha(Cl(I_{\alpha\overline{\beta}})) \subset I_{\alpha\overline{\beta}}$.

Из лемы 1 и определения $\Lambda_{\alpha\overline{\beta}}$ вытекает, что $\Lambda_{\alpha\overline{\beta}} \subset I_{\alpha\overline{\beta}}$. Покажем теперь, что при $\zeta \in (3/8, 5/8)$ существует окрестность $U \subset R^2$ множества $(0, \Lambda_{\alpha\overline{\beta}})$ такая, что $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(U) = (0, \Lambda_{\alpha\overline{\beta}})$.

Лемма 2. *Для любых* $\zeta \in (3/8, 5/8)$, $a \in (2, 4)$ *существует* $\gamma > 0$ *такое, что* $\Phi(Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})) \subset U_{\gamma\overline{\beta}}$.

Доказательство. Пусть $(z, t) \in Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$, где $\gamma = \min\{\sqrt{\Delta}, 4\}$, $a < 4$ и $\overline{\beta} < 4 - a(a-2)/2$. Обозначим $(z_1, t_1) := \Phi(z, t)$. Оценим z_1 и t_1. С учетом $3/8 < \zeta < 5/8$ имеем $|z_1| = |1-2\zeta||zt| < 4|1-2\zeta||z| < 4|1-2\zeta|\gamma < \gamma$ и

$$\frac{a(a-2)}{2} \geq |t_1| \geq -\frac{a(a-2)}{2} + 0{,}8\Delta - \frac{z^2}{2} > -\frac{a(a-2)}{2} + 0{,}3\Delta.$$

Таким образом, $\Phi(Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})) \subset U_{\gamma\overline{\beta}}$.

Положим $(z_j, t_j) := \Phi^j(z, t)$ и покажем, что $(z_j, t_j) \to (0, \Lambda_{\alpha\overline{\beta}})$ при $j \to \infty$ так, что $|z_j| \to 0$ равномерно по всем $(z, t) \in Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$. В самом деле, из доказательства леммы 1 вытекает, что $|z_j|$ — монотонно убывающая последовательность для любой точки $(z, t) \in Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$. Покажем, что $|z_j|$ равномерно убывает к нулю. Действительно, так как $Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$ — компакт, то существует $(\hat{z}, \hat{t}) \in Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$ такая, что $|\hat{z}_1| \geq |z_1|$ для всех $(z, t) \in Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})$. При этом $|\hat{z}_1| < \gamma$. Таким образом, получаем $\Phi(Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})) \subset Cl(U_{\alpha_1\gamma,\overline{\beta}})$, где $\alpha_1 = |\hat{z}|/\gamma$.

Аналогично можно показать, что в $Cl(U_{\alpha_1\gamma,\overline{\beta}})$ существует $(\tilde{z}, \tilde{t})$ такая, что $|\tilde{z}_1| \geq |z_1|$ для всех $(z, t) \in Cl(U_{\alpha_1\gamma,\overline{\beta}})$. При этом $|\tilde{z}_1| < \alpha_1\gamma$. Таким образом, $\Phi(Cl(U_{\alpha_1\gamma,\overline{\beta}})) \subset Cl(U_{\alpha_2\alpha_1\gamma,\overline{\beta}})$, где $\alpha_2 = |\tilde{z}_1|/(\alpha_1\gamma)$, и т. д. При этом получается, что $\Phi^j(Cl(U_{\gamma\overline{\beta}})) \subset Cl(U_{\gamma_j,\overline{\beta}})$, где $\gamma_j = \gamma\prod_{i=1}^{j}\alpha_i$.

Покажем, что $\gamma^* = \lim\limits_{j\to\infty}\gamma_j = 0$. Согласно определению γ_j для каждого j существует точка $(z^{(j)}, t^{(j)}) \in Cl(U_{\gamma_j,\overline{\beta}})$ такая, что $\left|z_1^{(j)}\right| = \gamma_j$. Поскольку $(z^{(j)}, t^{(j)})$ — ограниченная последовательность, то существует сходящаяся подпоследовательность, предельную точку которой обозначим через (z^*, t^*). Очевидно, что $(z^*, t^*) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} Cl(U_{\gamma_j,\overline{\beta}})$ и $|z_1^*| \geq |z_1|$ для любой $(z, t) \in$ $\in \bigcap_{j=1}^{\infty} Cl(U_{\gamma_j,\overline{\beta}})$. А так как $|z_1^*| = 4|1-2\zeta|\gamma^*$ и $4|1-2\zeta| < 1$, то $|z_1^*| < \gamma^*$ при $\gamma^* \neq 0$ и $|z_1^*| = 0$ при $\gamma^* = 0$.

Предположим, что $\gamma^* > 0$. Тогда существует $0 < \overline{\gamma} < \gamma^*$ такое, что $\Phi(Cl(U_{\gamma^*,\overline{\beta}})) \subset Cl(U_{\overline{\gamma},\overline{\beta}})$. Согласно определению $Cl(U_{\gamma^*,\overline{\beta}})$ это означает, что существует натуральное M такое, что для любого $m > M$ $\Phi(Cl(U_{\gamma_m,\overline{\beta}})) \subset$ $\subset Cl(U_{\overline{\gamma},\overline{\beta}})$, что противоречит определению последовательности множеств $U_{\gamma_j,\overline{\beta}}$. Следовательно, $\gamma^* = 0$.

Отметим, что приведенные в теореме и следствиях ограничения на значения ζ имеют достаточный характер и не являются необходимыми. Самый простой способ усиления изложенных выше результатов состоит в том, чтобы вместо Φ рассматривать его итерации. Покажем как это делается на примере Φ^2.

Вычисляя Φ^2, имеем

$$\Phi^2 : (z, t) \to \Big((1-2\zeta)^2 \frac{zt}{2}\big(a(a-2)-(z^2+t^2)\big),$$

$$\frac{a(a-2)}{2} - \frac{1}{2}\Big[(1-2\zeta)^2 z^2 t^2 + \big(a(a-2)-(z^2+t^2)\big)^2/4\Big]\Big). \tag{7}$$

Поскольку $\Psi_a^2(0) > -a(a-2)/2$, то существует $\delta > 0$ такое, что для любых (z, t) таких, что $|z| < \delta, |t| \leq a(a-2)/2$ справедливо соотношение

$$\Psi_a^2(0) < \frac{a(a-2)}{2} - \frac{z^2+t^2}{2} \leq \Psi_a(0).$$

Определим, при каких ζ для всех $|t| \leq a(a-2)/2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}|zt|(1-2\zeta)^2\left|a(a-2)-z^2-t^2\right| < |z|. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{1}{2}t\big(a(a-2)-z^2-t^2\big)$. Вычисляя точки экстремума функции $\varphi(t)$, имеем $t_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}(a-2)-z^2}$. Следовательно,

$$-\frac{a}{3}(a-2)\sqrt{\frac{a}{3}(a-2)} < \varphi(t_{\pm}) < \frac{a}{3}(a-2)\sqrt{\frac{a}{3}(a-2)}.$$

Но $\frac{a}{3}(a-2)\sqrt{\frac{a}{3}(a-2)}$ — монотонно возрастающая функция от a при $a \geq 2$. Поэтому $\frac{a}{3}(a-2)\sqrt{\frac{a}{3}(a-2)} < \frac{16}{9}\sqrt{6}$ для $2 \leq a < 4$. Таким образом, при $2 \leq a < 4$

$$\frac{1}{2}|zt|(1-2\zeta)^2\left|a(a-2)-z^2-t^2\right| < \frac{16}{9}\sqrt{6}\,|z|(1-2\zeta)^2$$

для всех $|z| < \delta$, $|t| \leq a(a-2)/2$. Следовательно, для малых по модулю z неравенство (8) выполняется всегда, когда $16\sqrt{6}\,(1-2\zeta)^2/9 < 1$. Иначе говоря, при $1/2 - 3/(8\sqrt[4]{6}) < \zeta < 1/2 + 3/(8\sqrt[4]{6})$. Этот последний интервал очевидно шире интервала $(3/8, 5/8)$. В самом деле, так как $3/(8\sqrt[4]{6}) > 3/16$, то $1/2 -$ $- 3/(8\sqrt[4]{6}) < 5/16 < 3/8$ и $1/2 + 3/(8\sqrt[4]{6}) > 11/16 > 5/8$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в доказательствах лемм и теоремы. Единственное отличие — это то, что в результате получается утверждение для Φ^2, аналогичное доказанной выше теореме. Чтобы получить подходящие утверждения, относящиеся к Φ, следует показать, что множество $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ — асимптотически устойчивый хаотический аттрактор. Наметим схему, как это можно сделать.

1. Напомним, прежде всего, что множество A является асимптотически устойчивым аттрактором, если оно устойчиво по Ляпунову и его область притяжения $B(A)$ содержит некоторую окрестность $U(A)$ множества A. (Под областью притяжения $B(A)$ подразумеваем множество точек, ω-предельные множества которых содержатся в A.) 2. Из существования окрестности U множества $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ такой, что $\Phi^2(Cl(U)) \subset U$ вытекает существование инвариантной относительно Φ окрестности $U \bigcup \Phi(U)$. 3. В силу инвариантности $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$, т.е. $\Phi((0, \Lambda_{\alpha\beta})) \subset (0, \Lambda_{\alpha\beta})$, и $(0, \Lambda_{\alpha\beta}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Phi^{2j}(U)$ для любой окрестности V множества $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ найдется натуральное J такое, что $\Phi^j(U) \subset V$ для любого $j > 2J$. 4. В силу инвариантности относительно Φ окрестности $\Phi^{2J}(U \bigcup \Phi(U))$ ω-предельные множества точек $(z, t) \in \Phi^{2J}(U \bigcup \bigcup \Phi(U))$ принадлежат $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Для любых* $a \in (2, 4)$, $\zeta \in (1/2 - 3/(8\sqrt[4]{6}), 1/2 + 3/(8\sqrt[4]{6}))$ $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ — *асимптотически устойчивое множество, инвариантное относительно отображения* Φ.

Следствие 4. *Если* $\Lambda_{\alpha\beta}$ — *хаотический аттрактор отображения* Ψ_a *и* a *и* ζ *такие, как в утверждении, то* $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ — *хаотический аттрактор отображения* Φ.

Следствие 5. *Существует* $\Delta \subset (2, 4)$ *положительной меры Лебега такое, что для каждого* $a \in \Delta$ *множество* $(0, \Lambda_{\alpha\beta})$ — *топологически транзитивный хаотический аттрактор отображения* Φ *для* $\zeta \in (1/2 - 3/(8\sqrt[4]{6}), 1/2 + 3/(8\sqrt[4]{6}))$.

1. *Schweizer I., Kennedy M. P., Hasler M., Dedieu H.* Synchronization theorem for a chaotic system.// Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – 5, № 1. – P. 297–302.
2. *Cuomo K. M., Oppenheim A. V.* Circuit implementation on synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. – 1993. – 71. – P. 65–68.
3. *Jacobson M.* Absolutely continuous invariant measures for oneparameter families of one-dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**, № 1. – P. 39–88.

Получено 16.10.97