УДК 517.95

А. Н. Витюк (Одес. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СВЕРХУ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

We prove a theorem on the existence of solutions of differential inclusion

$$D_0^{\alpha} u(x) \in F(x, u(x)), \quad u_{1-\alpha}(0) = \gamma, \quad (u_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} u(x)),$$

where $\alpha \in (0,1)$ and $D_0^{\alpha} u(x)$ $(I_0^{\alpha} u(x))$ is a Riemann–Liouville derivative (integral) of order α, and a set-valued mapping $F(x,u)$ is upper semicontinuous in u.

Доведено теорему про існування розв'язків диференціального включення

$$D_0^{\alpha} u(x) \in F(x, u(x)), \quad u_{1-\alpha}(0) = \gamma, \quad (u_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} u(x)),$$

де $\alpha \in (0,1)$ і $D_0^{\alpha} u(x)$ $(I_0^{\alpha} u(x))$ — похідна (інтеграл) Рімана – Ліувілля порядку α, а многозначне відображення $F(x,u)$ напівнеперервне зверху по u.

1. Пусть E^n — пространство n-мерных векторов с нулевым элементом θ и нормой $\|\cdot\|$; $\operatorname{conv} E^n$ — пространство непустых выпуклых и компактных подмножеств E^n с метрикой Хаусдорфа $\delta(\cdot,\cdot)$; $C(P)$, $AC(P)$, $L(P)$ — соответственно пространства непрерывных, абсолютно непрерывных и суммируемых функций $v: P \to E^n$; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Многозначное отображение $G(z): E^m \to \operatorname{conv} E^n$ называется полунепрерывным сверху в точке $z_0 \in E^m$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $\|z - z_0\| \le \delta$ имеет место включение $G(z) \subset G(z_0) + S_\varepsilon(\theta)$, $S_\varepsilon(\theta) = \{v \in E^n: \|v\| \le \varepsilon\}$. Функцию $g: E^m \to E^n$ называем селектором многозначного отображения $G(z): E^m \to E^n$, если $f(z) \in G(z)$, $z \in E^m$.

Пусть $J = (0, a]$, $\overline{J} = [0, a]$ и $f(x): J \to E^n$, $f(x) \in L(J)$. Интеграл

$$I_0^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x > 0,$$

называется [1, с. 41] левосторонним интегралом Римана – Лиувилля порядка $0 < \alpha < +\infty$. В частности,

$$I_0^1 f(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

В дальнейшем предполагаем, что $\alpha \in (0,1)$ и $f_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} f(x)$. Тогда

$$D_0^{\alpha} f(x) = D_x f_{1-\alpha}(x), \quad D_x = \frac{d}{dx},$$

называется [1, с. 43] левосторонней дробной производной Римана – Лиувилля функции $f(x)$ порядка α.

Если функция $f(x) \in L(J)$ имеет производную $D_0^\alpha f(x) \in L(J)$, то ([1], теорема 2.4)

$$I_0^\alpha(D_0^\alpha f(x)) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}. \tag{1}$$

2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$D_0^\alpha u(x) \in F(x, u(x)), \tag{2}$$

решения которого удовлетворяют условию

$$u_{1-\alpha}(0) = \gamma. \tag{3}$$

Решением задачи (2), (3) называем такую функцию $u : J \to E^n$, что $u(x) \in C(J)$, $u_{1-\alpha}(x) \in AC(\bar{J})$ и которая удовлетворяет условию (3) и дифференциальному включению (2) для почти всех (п. в.) $x \in J$.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение* $F(x, u)$: $\bar{J} \times E^n \to \operatorname{conv} E^n$ *удовлетворяет условиям:*

а) $F(\cdot, u)$: $\bar{J} \to \operatorname{conv} E^n$ *измеримо для каждого* $u \in E^n$;

б) $F(x, \cdot)$: $E^n \to \operatorname{conv} E^n$ *полунепрерывно сверху для п. в.* $x \in \bar{J}$;

в) $|F(x, u)| = \delta(F(x, u), \theta) \le M$.

Тогда множество решений задачи (2), (3) *непусто.*

Доказательство. Через $C_\alpha(J)$ обозначим множество таких $z(x) \in C(J)$, для которых $\lim x^{1-\alpha} z(x)$ при $x \to 0^+$ — конечное число. Для $z \in C_\alpha(J)$ полагаем $\|z\|_\alpha = \sup_{x \in J} x^{1-\alpha} \|z(x)\|$. Пространство $(C_\alpha(J), \|\cdot\|_\alpha)$ является банаховым [2] (лемма 2.6).

Через T обозначим множество таких $z \in C_\alpha(J)$, которые удовлетворяют условию (3) и $z_{1-\alpha}(x) \in AC(\bar{J})$, $\left\|D_0^\alpha z(x)\right\| \le M$ для п. в. $x \in J$. Очевидно, что T — выпуклое множество, а докажем, что T — компактное подмножество пространства $C_\alpha(J)$.

Пусть $\{z^{(i)}(x)\}$ — некоторая последовательность элементов множества T. Согласно (1)

$$z^{(i)}(x) = \frac{\gamma x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha(D_0^\alpha z^{(i)}(x)).$$

Если $y^{(i)}(x) = x^{1-\alpha} z^{(i)}(x)$, то $\lim_{x \to 0^+} y^{(i)}(x) = b$, $b = \gamma / \Gamma(\alpha)$. Положив $y^{(i)}(0) = b$, получим, что $y^{(i)}(x) \in C(\bar{J})$, $i \ge 1$. Докажем, что множество функций $y^{(i)}(x)$, $i \ge 1$, удовлетворяет условиям теоремы Арцела. Для $x \in \bar{J}$

$$\left\|y^{(i)}(x)\right\| \le \frac{\|\gamma\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{Ma}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Для $x_1, x_2 \in \bar{J}$, $x_1 < x_2$, имеем

$$\left\|y^{(i)}(x_2) - y^{(i)}(x_1)\right\| = \left\|x_2^{1-\alpha} z^{(i)}(x_2) - x_1^{1-\alpha} z^{(i)}(x_1)\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{x_2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^{x_2}(x_2-t)^{\alpha-1} D_0^\alpha z^{(i)}(t)\,dt - \int_0^{x_1}(x_1-t)^{\alpha-1} D_0^\alpha z^{(i)}(t)\,dt\right)\right\| +$$

$$+\ \frac{x_2^{1-\alpha}-x_1^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{x_1}(x_1-t)^{\alpha-1}D_0^{\alpha}z^{(i)}(t)\,dt\right\|. \tag{4}$$

Поскольку $\left\|D_0^{\alpha}z^{(i)}\right\|\le M$, а $x_2^{\alpha}-x_1^{\alpha}\le(x_2-x_1)^{\alpha}$, то из (4) следует оценка

$$\left\|y^{(i)}(x_2)-y^{(i)}(x_1)\right\|\le\frac{2Ma^{1-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}(x_2-x_1)^{\alpha}+\frac{Ma^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}(x_2-x_1)^{1-\alpha}. \tag{5}$$

Если $x_2-x_1<1$, а $\beta=\min(\alpha,1-\alpha)$, то в силу (5)

$$\left\|y^{(i)}(x_2)-y^{(i)}(x_1)\right\|\le L(x_2-x_1)^{\beta},\quad L=M(2a^{1-\alpha}+a^{\alpha})/\Gamma(1+\alpha).$$

Для $\varepsilon>0$ полагаем $\delta=\min(1,(\varepsilon\cdot L^{-1})^{1/\beta})$, и если $x_2-x_1<\delta$, то $\|y^{(i)}(x_2)-$ $-y^{(i)}(x_1)\|\le\varepsilon$, $i\ge1$. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $\{y^{(i)}(x)\}$, которая равномерно на $\bar{J}$ сходится к $y(x)\in C(\bar{J})$ (предполагаем, что такие свойства имеет и последовательность). Тогда для $x\in J$ при $i\to\infty$

$$x^{\alpha-1}\lim y^{(i)}(x)=x^{\alpha-1}y(x)=z(x).$$

Докажем, что $z(x)\in T$. Для этого остается еще доказать, что $z_{1-\alpha}(x)\in$ $\in AC(\bar{J})$ и $\left\|D_0^{\alpha}z(x)\right\|\le M$ для п. в. $x\in\bar{J}$.

С учетом определения производной $D_0^{\alpha}z^{(i)}(x)$ функцию $z_{1-\alpha}^{(i)}(x)$ можно представить в виде

$$z_{1-\alpha}^{(i)}(x)=\gamma+I_0^1(D_0^{\alpha}z^{(i)}(x)), \tag{6}$$

что позволяет легко убедиться в компактности последовательности $\{z_{1-\alpha}^{(i)}(x)\}$ как подмножества пространства $C(\bar{J})$. Пусть равномерно на $\bar{J}$

$$\lim_{i\to\infty}z_{1-\alpha}^{(i)}(x)=\lambda(x),\quad \lambda(x)\in AC(\bar{J}).$$

С другой стороны, $z_{1-\alpha}^{(i)}(x)=I_0^{1-\alpha}z^{(i)}(x)$. Отсюда и из теоремы Лебега следует, что

$$\lambda(x)=I_0^{1-\alpha}z(x)=z_{1-\alpha}(x), \tag{7}$$

т. е. $z_{1-\alpha}(x)\in AC(\bar{J})$.

Очевидно, что последовательность $\{D_0^{\alpha}z^{(i)}(x)\}$ является слабокомпактной в пространстве $L(J)$, и пусть ее слабый предел есть функция $\mu(x)\in L(J)$. Тогда в силу (6), (7) имеем

$$z_{1-\alpha}(x)=\gamma+I_0^1\mu(x). \tag{8}$$

Из (8) следует, что для п. в. $x\in\bar{J}$ $D_0^{\alpha}z(x)=\mu(x)$, $\left\|D_0^{\alpha}z(x)\right\|\le M$, так как $\|\mu(x)\|\le M$.

Таким образом, множество T является выпуклым и компактным подмножеством пространства $C_{\alpha}(J)$.

На множестве T определим отображение

$$\Phi(z)=\{u\in T:\ D_0^{\alpha}u\in F(x,z(x))\}.$$

Докажем, что $\Phi(z)$ для каждого $z\in T$ непустое множество. При выполнении условий а), б) отображение $F(x, z(x)) : \bar{J} \to \operatorname{conv} E^n$ может не быть [3] суперпозиционно измеримым. Однако существует [4] измеримое многозначное отображение $Q(x) \subset F(x, z(x))$ для п. в. $x \in \bar{J}$.

Следовательно, существует измеримый селектор $v(x) \in F(x, z(x))$ и в качестве $u(x)$ рассмотрим решение задачи $D_0^\alpha u(x) = v(x)$, $u_{1-\alpha}(0) = \gamma$. Согласно (1)

$$u(x) = \frac{\gamma x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha v(x).$$

Легко проверить, что $u(x) \in T$, а также, что $\Phi(z)$ является выпуклым и компактным подмножеством множества T.

Докажем, что $\Phi : T \to \operatorname{conv} T$ является полунепрерывным сверху. Поскольку отображение $\Phi(z)$ ограничено, то достаточно доказать, что замкнутым в пространстве $C_\alpha(J) \times C_\alpha(J)$ будет его график, т. е. множество $S = \{(z, u) : z \in \in T, u \in \Phi(z)\}$. С этой целью рассмотрим последовательность $\{z^{(i)}, u^{(i)}\} \to \to (z, u)$, причем $D_0^\alpha u^{(i)} \in \Phi(z^{(i)})$. Так как T — замкнутое множество, то $z \in \in T$.

Если $q(x) \in L(J)$ — слабый предел последовательности $\{D_0^\alpha u^{(i)}\}$, то $u(x) = = \gamma x^{1-\alpha} / \Gamma(\alpha) + I_0^\alpha q(x)$ и $D_0^\alpha u(x) = q(x)$ для п. в. $x \in \bar{J}$. Согласно теоремам 2.8 и 4.1 из [5] следует, что для п. в. $x \in \bar{J}$

$$D_0^\alpha u(x) \in \bigcap_{i=1}^\infty \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=i}^\infty D_x u_{1-\alpha}^{(i)}(x) \subset \bigcap_{i=1}^\infty \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k=i}^\infty F(x, z^{(i)}(x)) \subset F(x, z(x)).$$

Следовательно, $u(x) \in \Phi(z)$.

Теперь согласно теореме Какутани [6] многозначное отображение $\Phi(z)$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку, которая будет решением задачи (2), (3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда множество решений задачи (2), (3) является компактным подмножеством пространства* $C_\alpha(J)$.

Для доказательства этой теоремы достаточно учесть, что каждое решение задачи (2), (3) является элементом пространства $C_\alpha(J)$ и неподвижной точкой многозначного отображения $\Phi(z)$, а также, что множество неподвижных точек отображения $\Phi(z)$ замкнуто.

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. *Tazali A. Z. – A. M.* Local existence theorems for ordinary differential equations of fractional order // Lect. Notes Math. – 1982. – **964**. – P. 652 – 665.
3. *Jarnik J., Kurzweil J.* On conditions on right-hand sides of differential relations // Čas. pěstov. mat. – 1977. – **102**, № 4. – P. 334 – 349.
4. *Castaing C.* Sur les équations différentielles multivoques // C. r. Acad. sci. – 1966. – **263**, № 2. – P. A63 – A66.
5. *Davy J. L.* Properties of the solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. – 1972. – **6**, № 3. – P. 379 – 398.
6. *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke. Math. J. – 1941. – **8**, № 3. – P. 457 – 459.

Получено 30.09.96,
после доработки — 02.02.99