УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Д. Я. Требенко (Нац. пед. ун-т, Киев)

ФАКТОР-ГРУППЫ ГРУПП НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

For arbitrary variety $\mathfrak{X}$ of groups and arbitrary class $\mathfrak{Y}$ of groups, which is closed on quotient groups, we prove that a quotient group G/N of the group G possesses an invariant system with $\mathfrak{X}$- and $\mathfrak{Y}$-factors (respectively, is a residually $\mathfrak{Y}$-group) in the case where G possesses an invariant system with $\mathfrak{X}$- and $\mathfrak{Y}$-factors (respectively, is a residually $\mathfrak{Y}$-group) and $N \in \mathfrak{X}$ (respectively, N is a maximal invariant $\mathfrak{X}$-subgroup of the group G).

Для довільного многовиду $\mathfrak{X}$ груп і довільного класу $\mathfrak{Y}$ груп, що замкнений за фактор-групами, доведено, що фактор-група G/N групи G має інваріантну систему з $\mathfrak{X}$- і $\mathfrak{Y}$-факторами (відповідно, апроксимується $\mathfrak{Y}$-групами) у випадку, коли G має інваріантну систему з $\mathfrak{X}$ і $\mathfrak{Y}$-факторами (відповідно, апроксимується $\mathfrak{Y}$-групами) і $N \in \mathfrak{X}$ (відповідно, N є максимальною інваріантною $\mathfrak{X}$-підгрупою групи G).

В настоящей статье продолжены исследования, начатые в [1, 2]. Основными ее результатами являются следующие теоремы.

Теорема 1 [2]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— некоторое многообразие групп и* $\mathfrak{Y}$ *— некоторый класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп по инвариантным* $\mathfrak{X}$*-подгруппам. Пусть* G *— группа, аппроксимируемая* $\mathfrak{Y}$*-группами и* N *— ее максимальная инвариантная* $\mathfrak{X}$*-подгруппа. Тогда фактор-группа* G/N *аппроксимируется* $\mathfrak{Y}$*-группами.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— некоторый класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и удовлетворяющий следующему условию: произвольная группа* $H \neq 1$ *принадлежит* $\mathfrak{X}$ *в случае, когда она имеет убывающий инвариантный ряд* $\mathcal{K}$ *такой, что* $\bigcap_{K \in \mathcal{K} \setminus \{1\}} K = 1$ *и для каждой* $K \in \mathcal{K} \setminus \{1\}$ $H/K \in \mathfrak{X}$; $\mathfrak{Z}$ *— класс, состоящий из всех гомоморфных образов нормальных делителей* $\mathfrak{X}$*-групп;* $\mathfrak{Y}$ *— некоторый класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп по инвариантным* $\mathfrak{Z}$*-подгруппам. Пусть* G *— группа имеющая инвариантную систему* $\mathcal{M}$ *с* $\mathfrak{X}$*- и* $\mathfrak{Y}$*-факторами,* $N \trianglelefteq G$ *и* $N \in \mathfrak{X}$; $\mathcal{F}$ *— инвариантная система фактор-группы* G/N*, состоящая из всех ее подгрупп* MN/N *с* $M \in \mathcal{M}$ *и их пересечений. Тогда произвольный фактор системы* $\mathcal{F}$ *или принадлежит классу* $\mathfrak{X}$*, или принадлежит классу* $\mathfrak{Y}$ *и для некоторых* $M_1 \in \mathcal{M}$ *и* $M_2 \in \mathcal{M}$*, составляющих в* $\mathcal{M}$ *скачок, имеет вид* $(M_2N/N)/(M_1N/N)$.

Заметим, что в теореме 2 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}$ в случае, когда класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия инвариантных подгрупп.

Доказательство теоремы **1.** Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех $M \trianglelefteq G$, для которых $G/M \in \mathfrak{Y}$, и $L = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} MN$. Тогда $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = 1$, и в фактор-группе G/L $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} (MN/L) = 1$. Далее, $(G/L)/(MN/L) \simeq G/MN \simeq (G/M)/(MN/M)$ и $MN/M \simeq N/(N \cap M)$. Так как $N \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — многообразие групп, то $N/(N \cap M) \in \mathfrak{X}$ и, значит, $MN/M \in \mathfrak{X}$. Поскольку $G/M \in \mathfrak{Y}$ и $MN/N \in \mathfrak{X}$, то $(G/M)/(MN/M) \in \mathfrak{Y}$. Поэтому $(G/L)/(MN/L) \in \mathfrak{Y}$. Следовательно, фактор-группа G/L аппроксимируется $\mathfrak{Y}$-группами.

Далее для произвольной $M \in \mathcal{M}$ $L = (M \cap L)N$. Поскольку $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} (M \cap L) = 1$, $L/(M \cap L) \simeq N/(M \cap L \cap N)$ и $\mathfrak{X}$ — многообразие, то $L \in \mathfrak{X}$, и, значит, ввиду максимальности N $N = L$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы **2.** Можно считать, что $G \neq N$. Пусть F/L —

произвольный фактор системы $\mathcal{F}$ и $F = R/N$, $L = T/N$; $g \in R\backslash T$ и M_1 — максимальная из подгрупп $M \in \mathcal{M}$, для которых $g \notin MN$; $\mathfrak{D}$ — совокупность всех $M \in \mathcal{M}$, для которых $g \in MN$, и $M_2 = \bigcap_{M \in \mathfrak{D}} M$. Тогда $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ и, как нетрудно убедиться, $T = M_1 N$. Понятно, что либо M_1 и M_2 составляют в $\mathcal{M}$ скачок, либо $M_1 = M_2$.

В первом случае, очевидно, $R = M_2 N$. Следовательно,

$$F/L = (M_2N/N)/(M_1N/N) \simeq M_2N/M_1N \simeq M_2/M_1(M_2 \cap N) \simeq$$

$$\simeq (M_2/M_1)/(M_1(M_2 \cap N)/M_1).$$

Далее, $M_1(M_2 \cap N)/M_1 \simeq (M_2 \cap N)/(M_1 \cap N) \in \mathfrak{Z}$. Поскольку $M_2/M_1 \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ и класс $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ замкнут относительно взятия фактор-групп по инвариантным $\mathfrak{Z}$-подгруппам, то $F/L \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$.

Пусть $M_1 = M_2$. Для каждой $M \in \mathfrak{D}$ $N \subseteq R \subseteq MN$, вследствие чего $R = (R \cap M)N$. Положим $H = R/M_1$. Тогда

$$H/((R \cap M)/M_1) \simeq R/(R \cap M) = (R \cap M)N/(R \cap M) \simeq$$

$$\simeq N/(R \cap M \cap N).$$

Значит, поскольку $N \in \mathfrak{X}$ и класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, $H/((R \cap M)/M_1) \in \mathfrak{X}$. Далее, $\bigcap_{M \in \mathfrak{D}} (R \cap M)/M_1 = 1$ и для каждой $M \in \mathfrak{D}$ $(R \cap M)/M_1 \neq 1$. Поэтому, очевидно, система $\{(R \cap M)/M_1, 1 \mid M \in \mathfrak{D}\}$ включает в себя ряд $\mathcal{K}$ такой, как в формулировке настоящей теоремы. Таким образом, согласно ее условию $H \in \mathfrak{X}$. Тогда, поскольку $F/L \simeq R/T = R/M_1N \simeq H/(M_1N/M_1)$ и класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, $F/L \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия, непосредственно вытекающие из теоремы 1.

***Следствие* 1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое многообразие групп и $\mathfrak{Y}$ — некоторый класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп по инвариантным $\mathfrak{X}$-подгруппам. Пусть G — группа, аппроксимируемая $\mathfrak{Y}$-группами, и N — ее инвариантная $\mathfrak{X}$-подгруппа. Тогда фактор-группа G/N является расширением $\mathfrak{X}$-группы с помощью группы, которая аппроксимируется $\mathfrak{Y}$-группами.*

***Следствие* 2** [2]. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, n — фиксированное натуральное число и N — какой-нибудь максимальный среди нильпотентных ступени $\leq n$ нормальных делителей группы G. Тогда фактор-группа G/N финитно аппроксимируема.*

***Следствие* 3** [2]. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, n — фиксированное натуральное число и N — какой-нибудь максимальный среди разрешимых ступени $\leq n$ нормальных делителей группы G. Тогда фактор-группа G/N финитно аппроксимируема.*

***Следствие* 4.** *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, n — фиксированное натуральное число и N — какой-нибудь максимальный среди нормальных делителей группы G, имеющих конечную экспоненту, делящую n. Тогда фактор-группа G/N финитно аппроксимируема.*

***Следствие* 5.** *Пусть G — группа, аппроксимируемая (конечными) нильпотентными группами, и N — ее нормальный делитель, такой, как в одном из следствий 2–4. Тогда G/N аппроксимируется (конечными) нильпотентными группами*

***Следствие* 6.** *Пусть G — группа, аппроксимируемая (конечными) разре-*

шимыми группами, и N — ее нормальный делитель, такой, как в одном из следствий 2–4. Тогда G/N аппроксимируется (конечными) разрешимыми группами.

Следствие **7.** *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — группа, аппроксимируемая (конечными) π-группами, и N — ее нормальный делитель, такой, как в одном из следствий 2–4. Тогда G/N аппроксимируется (конечными) π-группами.*

Следствие **8.** *Пусть p — простое число, G — группа, аппроксимируемая (конечными) p-группами, и N — ее нормальный делитель, такой, как в одном из следствий 2–4. Тогда G/N аппроксимируется (конечными) p-группами.*

Следствие **9.** *Фактор-группа финитно аппроксимируемой группы по ее нильпотентному (соответственно, разрешимому) нормальному делителю является расширением нильпотентной (соответственно, разрешимой) группы с помощью финитно аппроксимируемой группы.*

Следствие **10.** *Фактор-группа финитно аппроксимируемой группы по ее нормальному делителю конечной экспоненты, делящей $n \in \mathbb{N}$, является расширением группы конечной экспоненты, делящей n, с помощью финитно аппроксимируемой группы.*

Из теоремы 2 автоматически вытекает следующее предложение.

Следствие **11.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — многообразие групп и $\mathfrak{Y}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп по инвариантным $\mathfrak{X}$-подгруппам; G — группа, имеющая некоторую инвариантную систему $\mathcal{M}$ с $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$-факторами, $N \trianglelefteq G$ и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $N \in \mathfrak{X}^n$. Пусть $\mathfrak{F}$ — инвариантная система фактор-группы G/N, состоящая из всех ее подгрупп вида MN/N с $M \in \mathcal{M}$ и их пересечений. Тогда произвольный фактор системы $\mathfrak{F}$ принадлежит к $\mathfrak{X}$ или к $\mathfrak{Y}$.*

Следующее предложение вытекает из следствия 11 и теорем Биркгофа и С. Р. Когаловского (см., например, [3, с. 468]).

Следствие **12** (см. [2], теорема 1). *Пусть $\mathfrak{Y}$ — некоторый класс групп, замкнутый по фактор-группам и поддекартовым произведениям, G — группа, имеющая инвариантную систему с $\mathfrak{Y}$-факторами, $N \trianglelefteq G$ и $N \in \mathfrak{Y}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда фактор-группа G/N имеет инвариантную систему с $\mathfrak{Y}$-факторами.*

(Теорему 1 [2] следует читать в приведенной выше формулировке.)

1. *Черников Н. С., Требенко Д. Я.* Фактор-группы локально ступенчатых групп и групп некоторых классов Куроша–Черникова // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1545–1553.
2. *Черников Н. С., Требенко Д. Я.* О фактор-группах групп некоторых классов // Міжнар. наук. конф. „Сучасні проблеми механіки і математики", присв. 70-річчю від дня народження акад. НАН України Я. С. Підстригача: Матеріали (Львів, 25–28 травня 1998 р.). — Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 1998. – С. 246.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 15.02.99