УДК 519.21

Д. В. Гусак, М. С. Братійчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
А. В. Свіщук (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ)

ТВОРЧИЙ ВНЕСОК В. С. КОРОЛЮКА В РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

We briefly present principal results of the scientific activity of V. S. Korolyuk in probability theory and mathematical statistics.

Стисло викладено основні результати наукової діяльності В. С. Королюка в області теорії ймовірностей та математичної статистики.

До активної наукової роботи В. С. Королюк прилучився в студентські роки, коли Б. В. Гнеденко запропонував йому зайнятися дослідженням областей притягання стійких розподілів. Ними було знайдено зручну форму умов притягання в термінах характеристичних функцій [1]. Під керівництвом А. М. Колмогорова він розвинув новий підхід до задач асимптотичного аналізу непараметричних статистик. Пізніше В. С. Королюк тривалий час займався теоретичними і практичними проблемами програмування (розвиток адресного програмування, розробка адресних алгоритмів та елементів універсальної адресної мови для опису обчислювальних процесів). Разом з тим основну увагу він приділяє граничним задачам теорії ймовірностей і розвиває асимптотичні методи їх дослідження, розробляє метод потенціалу, започатковує дослідження напівмарковських процесів і створює теорію фазового укрупнення та усереднення випадкових процесів, розвиває теорію випадкових еволюцій.

В даній статті ми не зупинятимемося на результатах, пов'язаних з проблемами кібернетики, і на прикладних аспектах теоретичного доробку В. С. Королюка, а намагатимемося стисло висвітлити основні віхи тієї частини його доробку, яка безпосередньо пов'язана з теорією ймовірностей та математичною статистикою.

1. Асимптотичний аналіз в граничних задачах для випадкових блукань та пуассонівських процесів. Асимптотичний підхід до вивчення задач математичної статистики та теорії ймовірностей був започаткований у 1951 р. в роботі Б. В. Гнеденка та В. С. Королюка [2], де досліджувалася задача максимального розходження між двома емпіричними розподілами. В. С. Королюк розширив рамки його застосування в роботах [3 – 8]. Для дослідження граничних задач скінченно-різницевих рівнянь В. С. Королюк розвинув методику аналізу випадкових блукань в схемі Бернуллі [6 – 8], яка дозволила знайти точні й асимптотичні зображення для розподілів різних функціоналів, що виникають в задачах перевірки статистичних гіпотез. В [9 – 14] він розвинув асимптотичний аналіз розподілів функціоналів для гратчастих схем блукань — більш складних схем підсумовування, що охоплюють і марковську залежність. Вивчення асимптотичної поведінки функціоналів, що залежать від параметра $\varepsilon \to 0$, базується на рівнянні і граничних умовах для шуканого допграничного розподілу

$$P_\varepsilon U_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D} \text{ — деяка область,}$$

$$U_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma \text{ — границя області } \mathcal{D},$$

P_ε — інтегро-різницевий або інтегро-диференціальний оператор. Початок такому підходу до знаходження граничного розподілу $U_0(x)$ та уточнення різниці $U_\varepsilon(x) - U_0(x)$ поклали основоположні результати А. М. Колмогорова та О. Я. Хінчина. Відправним об'єктом дослідження асимптотичними методами були дві проблеми дифузії, сформульовані О. Я. Хінчиним в монографії „Асимптотические методы в теории вероятностей" (1934).

Нехай $\{\xi_{\varepsilon k}\}_{k=0}^{n}$ — послідовність серій випадкових величин ($\varepsilon = \varepsilon(n) \to 0$, $n \to \infty$), суми яких

$$S_{\varepsilon k} = \sum_{r=0}^{k} \xi_{\varepsilon k} r, \quad 0 \le k \le n,$$

утворюють однорідний ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями $P_\varepsilon(x, A)$.

В першій проблемі дифузії $S_{\varepsilon k}$ розглядається як послідовність значень випадкової точки в моменти

$$0 = t_{\varepsilon 0} < t_{\varepsilon 1} < \ldots < t_{\varepsilon n} = 1.$$

Якщо позначити область в площині (x, t) через

$$Q = \{0 \le t \le 1, \ z_-(t) < x < z_+(t)\},$$

то досліджуваний функціонал $U_\varepsilon(k, x)$ визначається як розв'язок інтегрального рівняння в області Q

$$P_\varepsilon[U_\varepsilon] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U_\varepsilon(k, x+y) P_\varepsilon(x, dy) - U_\varepsilon(k+1, x) = 0, \quad t \in Q_{t_\varepsilon, k+1},$$

з умовами $U_\varepsilon(0, x) = f_\varepsilon(0, x)$, $U_\varepsilon(k, x) = f_\varepsilon(t_k, x)$, $x \notin Q_{t_k} = \{Q, \ t = t_k\}$.

В другій проблемі дифузії для шуканого функціонала $U_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x, f_\varepsilon)$ гранична задача визначається інтегральним рівнянням

$$P_\varepsilon[U_\varepsilon] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U_\varepsilon(x+y) P_\varepsilon(x, dy) - U_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in G,$$

та умовою

$$U_\varepsilon(x, f_\varepsilon) = f_\varepsilon(x), \quad x \notin G.$$

Алгоритм побудови асимптотичних розкладів для $U_\varepsilon(x)$ в сформульованих задачах базується на розщепленні оператора P_ε, яке забезпечує рекурентний процес знаходження членів розкладу за степенями параметра ε.

Для розвинення асимптотичного аналізу В. С. Королюк застосував нові факторизаційні методи і вдосконалив метод примежових шарів стосовно цих двох граничних задач [15–17]. Завдяки поєднанню ймовірнісних та аналітичних методів йому вдалось побудувати асимптотичне розвинення для $U_\varepsilon(x)$ у вигляді

$$U_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \left[U_k(x) + \varepsilon V_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + o(\varepsilon^n).$$

Регулярні члени $U_k(x)$ описуються системами диференціальних рівнянь, а функції $V_k(\cdot)$, які дають суттєвий вклад лише в околі границі Γ, визначаються системами інтегральних рівнянь. Ці системи рівнянь знаходять шляхом відповідного розщеплення оператора P_ε на класі гладких функцій u:

$$\varepsilon^2 P_\varepsilon u = P_0 u + \varepsilon P_1 u + \ldots + \varepsilon^k P_k u + \ldots$$

та на класі гладких функцій v в околі границі Γ:

$$P_\varepsilon v = P_0^\Gamma + \varepsilon P_1^\Gamma + \ldots + \varepsilon^k P_k^\Gamma + \ldots .$$

На основі отриманих результатів В. С. Королюк розробив ефективний алгоритмічний апарат побудови асимптотичних розвинень для розподілів граничних функціоналів, а також для послідовності серій випадкових величин, послідовні суми яких пов'язані в однорідний ланцюг Маркова. Ці результати знайшли широке застосування при вивченні розподілів екстремальних значень сум випадкових величин, максимальних відхилень між двома емпіричними функціями розподілу і при дослідженні інших проблем математичної статистики, теорії систем масового обслуговування та теорії надійності.

Асимптотичні методи аналізу в схемах блукань з дискретним часом були застосовані з відповідною модифікацією до схем з неперервним часом. В. С. Королюк запропонував аспіранту Д. В. Гусаку поширити асимптотичні методи аналізу на вивчення розподілів функціоналів пуассонівського процесу та інших однорідних процесів з незалежними приростами. Такий підхід дозволив отримати асимптотичні розвинення для розподілів екстремальних значень та різних функціоналів від узагальнених пуассонівських процесів [18].

Поряд з асимптотичними методами розвивались факторизаційні методи вивчення розподілів різних граничних функціоналів для однорідних процесів з незалежними приростами: момент та величини першого перестрибу, момент першого досягнення максимуму (див. [19 – 24]).

Використання ідей факторизації й асимптотичного аналізу з удосконаленням методу примежових шарів, поєднання ймовірнісного та аналітичного методів послужили пізніше основою для оригінального методу потенціалу в граничних задачах теорії ймовірностей (див. [25]).

2. Метод потенціалу в граничних задачах для процесів з незалежними приростами та випадкових блукань. В 1974 р. В. С. Королюк запропонував новий підхід до досліджень граничних функціоналів для узагальнених, неперервних знизу пуассонівських процесів з від'ємним зсувом, а також для неперервних знизу гратчастих випадкових блукань. Щоб пояснити головну ідею цього підходу, припустимо, що кумулянта процесу $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$ має вигляд

$$k(s) = \ln \mathrm{E}\, e^{-s\xi(1)} = -as + c\int_0^\infty (e^{-sy} - 1)\, dF(y), \qquad \operatorname{Re} s \geq 0, \tag{1}$$

де $a < 0$, $c > 0$ і $F(x)$ є функцією розподілу стрибків процесу. Відомо, що знаходження зображення для характеристик функціоналів, пов'язаних з досягненням процесом $\xi(t)$ рівня $x > 0$, зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$-a\frac{d}{dx}\varphi(x) + c\int_0^\infty (\varphi(x-y) - \varphi(x))\, dF(y) - \lambda\varphi(x) = f(x), \qquad x > 0, \tag{2}$$

де $\lambda \geq 0$ і $f(x)$ — деяка відома функція, з такою граничною умовою для шуканої функції $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = 0, \qquad x \leq 0. \tag{3}$$

Традиційний підхід до розв'язування задачі (2), (3) полягав у застосуванні перетворення Лапласа до рівняння (2); при цьому сталу $\varphi(0)$, що виникає, потрібно було шукати за допомогою додаткових міркувань. Але такий підхід не враховував достатньою мірою специфіку оператора

$$L_\lambda u(x) = -a\frac{d}{dx}u(x) + c\int_0^\infty (u(x-y) - u(x))\, dF(y) - \lambda u(x), \tag{4}$$

який у випадку граничних функціоналів, як правило, розглядався як оператор, означений на класі CB_+ функцій, які рівні нулю на півосі $x \leq 0$, є диференційовними для $x > 0$, мають скінченну правосторонню границю в точці 0 і обмежені на всій осі. Крім того, кожен новий функціонал вимагав окремого дослідження. В. С. Королюк поставив таке питання: чи не можна знайти загальний розв'язок граничної задачі (2), (3) з тим, щоб потім для конкретного функціонала знайти відповідну функцію f і, підставивши її в цей розв'язок, отримати зображення потрібної нам характеристики? Виявляється, можна. Але для цього потрібно трохи інакше подивитись на оператор L_λ. Пояснимо це для випадку оператора $L = L_0$ в припущенні, що $E\xi(1) > 0$. В цьому випадку рівняння

$$k(s) = 0 \tag{5}$$

має два корені в півплощині $\operatorname{Re} s > 0$: $s = 0$ і $s = \rho > 0$.

Позначимо через $CB_+^{(\rho)}$ клас функцій, які рівні нулю на півосі $x \le 0$, є диференційовними для $x > 0$, мають скінченну правосторонню границю в точці 0 і зростають на $+\infty$ не швидше ніж $e^{\rho x}$, а $C_+^{(\rho)}$ — підклас функцій з $CB_+^{(\rho)}$, які є неперервними на всій осі.

Відзначимо, що оператор L коректно означений на класах функцій $CB_+^{(\rho)}$ і $C_+^{(\rho)}$, і якщо $f(x) \in C_+^{(0)}$, то

$$\int_0^\infty e^{-sx} L f(x)\, dx = k(s)\hat{f}(s), \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{6}$$

де $\hat{f}(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) f(x)\, dx$. Рівність (6) показує, що функція $k(s)$ є символом оператора L і рівняння

$$a\frac{d}{dx}\varphi(x) - c\int_0^\infty (\varphi(x-y) - \varphi(x))\, dF(y) = 0, \quad x > 0, \tag{7}$$

має лише тривіальний розв'язок у класі $C_+^{(0)}$. Але якщо це рівняння розглянути в класі $CB_+^{(\rho)}$, то воно буде мати ще один розв'язок. Його вигляд підказує факторизація оператора L у вигляді

$$L = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - \rho I\right) G, \tag{8}$$

де I — одиничний оператор, а G — деякий інтегральний оператор, і множники цієї факторизації комутують. Факторизація (8) є наслідком розкладу символу оператора L у вигляді $k(s) = s(s-\rho)g(s)$, де

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x)\, dx, \qquad G(x) = \rho^{-1} a \int_x^\infty (1 - e^{\rho(x-y)})\, dF(y)$$

і є символом оператора G. Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд $\varphi(x) = CR(x)$, де функція $R(x)$, яку В. С. Королюк назвав потенціалом, є розв'язком рівняння

$$-a\frac{d}{dx}R(x) + c\int_0^\infty (R(x-y) - R(x))\, dF(y) = 0, \quad x > 0, \tag{9}$$

з такими граничними умовами:

$$R(x) = 0, \quad x < 0, \qquad R(0) = 1. \tag{10}$$

Для потенціалу $R(x)$ справедливе зображення

$$R(x) = \frac{1}{\mathrm{E}\xi(1)}(1 - Re^{\rho x} - V(x)),$$

де стала Крамера $R = g(0)/g(\rho)$, а $V(x)$ є функцією типу примежового шару, тобто $V(x) = o(1)$ при $x \to \infty$. Аналогічна конструкція справедлива і тоді, коли $\mathrm{E}\,\xi(1) \le 0$; лише у випадку $\mathrm{E}\,\xi(1) < 0$ додатково припускаємо, що рівняння (5) має корінь $\rho < 0$ і $k'(\rho) > -\infty$, а якщо $\mathrm{E}\,\xi(1) = 0$, то припускаємо, що $\mathrm{E}\,\xi^2(1) < \infty$. Якщо всі перераховані припущення виконані, то справедлива така теорема.

Теорема 1. *Загальний розв'язок рівняння* (7) *має вигляд* $\varphi(x) = CR(x)$, *де функція* $R(x)$ *є розв'язком граничної задачі* (9), (10) *і для цієї функції справедливе асимптотичне зображення*

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathrm{E}\xi(1)|}(1 - Re^{\rho x} - V(x)), & \mathrm{E}\,\xi(1) \ne 0; \\[2ex] \dfrac{2}{\mathrm{D}^2\xi(1)}(x + R_0 - V(x), & \mathrm{E}\,\xi(1) = 0, \end{cases}$$

де $R = g(0)/g(\rho)$, $R_0 = -g'(0)/g(0)$ *і* $V(x) = o(1)$, $\mathrm{E}\,\xi(1) \le 0$, *та* $V(x) = o(\exp(\rho x))$, $\mathrm{E}\,\xi(1) > 0$ *при* $x \to \infty$.

За допомогою потенціалу $R(x)$ загальний розв'язок рівняння

$$-a\frac{d}{dx}\varphi(x) + c\int_0^\infty (\varphi(x-y) - \varphi(x))\,dF(y) = f(x), \quad x > 0, \tag{11}$$

в класі функцій, обмежених на скінченних інтервалах, записується так:

$$\varphi(x) = CR(x) + \int_0^x R(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Для достатньо малих λ коректно означена функція $R_\lambda(x) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^k R^{k*}(x)$, де символ $k*$ означає k-кратну згортку функції $R(x)$. Ця функція була названа В. С. Королюком *резольвентою* процесу $\xi(t)$. Неважко переконатися, що загальний розв'язок рівняння

$$-a\frac{d}{dx}\varphi(x) + c\int_0^\infty (\varphi(x-y) - \varphi(x))\,dF(y) - \lambda\varphi(x) = f(x), \quad x > 0, \tag{12}$$

в класі функцій, обмежених на скінченних інтервалах, записується так:

$$\varphi(x) = CR_\lambda(x) + \int_0^x R_\lambda(x-y)\,f(y)\,dy. \tag{13}$$

Неважко зрозуміти, що якщо дві функції $u_1(x)$, $u_2(x)$ збігаються на відрізку $[0, T]$ і $u_1(x) = u_2(x) = 0$ для $x < 0$, то $L_\lambda u_1(x) = L_\lambda u_2(x)$, $0 < x < T$, і, отже, (13) є загальним розв'язком рівняння (11) на інтервалі $(0, T)$ в класі функцій, обмежених на скінченних інтервалах.

Тепер схема знаходження зображень для характеристик граничних функціоналів стає стандартною: для шуканої характеристики записуємо рівняння (2) з відповідною граничною умовою, записуємо загальний розв'язок рівняння (12) у вигляді (13), після чого, використовуючи граничну умову, знаходимо сталу C.

Аналогічна ідея була реалізована і для напівнеперервних решітчастих блукань.

Результати досліджень для цих двох класів випадкових процесів були викладені в монографії В. С. Королюка [25], яка вийшла друком в 1975 р. і в 1976 р. була відзначена премією ім. М. М. Крилова.

Запропонований підхід виявився ефективним і при вивченні блукань з двома границями, а особливо при дослідженні асимптотичних властивостей функціоналів. Розглянемо це на прикладі задачі про банкрутство. Під банкрутством будемо розуміти ситуацію, коли процес $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, вперше залишає інтервал $(x-T; x)$, $0<x<T$, через нижню границю $x-T$. Якщо τ_x^T є моментом банкрутства, то твірна функція $\psi(x,\lambda) = \mathrm{E}\exp(-\lambda\tau_x^T)$ задовольняє рівняння

$$-a\frac{d}{dx}\psi(x,\lambda) + c\int_0^\infty (\psi(x-y,\lambda) - \psi(x,\lambda))\,dF(y) - \lambda\psi(x,\lambda) = 0 \qquad (14)$$

для $0<x<T$ і $\psi(T,\lambda) = 1$. Таким чином, $\psi(x,\lambda) = CR_\lambda(x)$, $0<x<T$, і, використовуючи граничну умову, отримуємо $\mathrm{E}e^{-\lambda\tau_x^T} = R_\lambda(x)/R_\lambda(T)$, а для ймовірності банкрутства маємо $\mathrm{P}\{\tau_x^T < \infty\} = R(x)/R(T)$. Використовуючи асимптотичні властивості резольвенти і потенціалу, можемо легко дослідити асимптотичні властивості ймовірності банкрутства. Так, якщо $\mathrm{E}\xi(1) = 0$, $\mathrm{E}\xi^2(1) = \sigma^2$, то

$$\lim_{T\to\infty} T\mathrm{P}\{\tau_x^T < \infty\} = \frac{\sigma^2}{2}R(x), \qquad \lim_{T\to\infty} T\mathrm{E}e^{-\lambda\tau_x^T/T} = \frac{R(x)}{\sqrt{\frac{2}{\sigma^2\lambda}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{2}{\sigma^2\lambda}}}.$$

В монографії [26] отримано асимптотичне розвинення для ймовірності банкрутства за степенями $t^{-1/2}$, якщо $x = x_1\sqrt{t}$, $T = x_2\sqrt{t}$. Ця ж монографія містить ряд інших результатів, пов'язаних з асимптотичним аналізом граничних функціоналів для напівнеперервних процесів з незалежними приростами.

Подальше розвинення методу потенціалу відбувалося в двох напрямках: розширення класу процесів та розширення області застосувань цього методу. Крім самого автора цього методу активну участь брали тут учні і колеги В. С. Королюка [27]. Так, у 1975 р. В. М. Шуренков і В. Н. Супрун [28] перенесли метод потенціалу на процеси з незалежними приростами та стрибками одного знаку. При цьому було встановлено зв'язок між потенціалом та резольвентою, введеними В. С. Королюком, та резольвентою як оператором, породжуваним деяким марковським процесом. Процес цей визначається так: нехай $\xi(t)$, $t\ge 0$, — процес з незалежними приростами без додатних стрибків і $\xi(0) = x > 0$, а $\xi^0(t)$ — марковський процес, який отримується з $\xi(t)$ обривом в момент першого виходу на від'ємну піввісь. Справедливий такий результат.

Теорема 2. *Для резольвенти* R_λ^0 *процесу* $\xi^0(t)$ *справедливе зображення*

$$\mathrm{R}_\lambda^0 f(x) = R_\lambda(x)\int_0^\infty e^{-\rho_+(\lambda)x} f(x)\,dx - \int_0^x R_\lambda(x-y)\,f(y)\,dy, \qquad (15)$$

де

$$R_\lambda(x) = \rho_+(\lambda)\int_0^x e^{-\rho_+(\lambda)(x-y)}\,dF_\lambda(y),$$

$$F_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{P}\left\{-\inf_{0\le u\le t} \xi(u) < x \,/\, \xi(0) = 0\right\} dt,$$

а $\rho_+(\lambda)$ *є единим коренем рівняння* $k(s) = \lambda$ *в півплощині* $\operatorname{Re} s \ge 0$.

В цій теоремі $k(s)$ є кумулянтою процесу $\xi(t)$. З допомогою зображення (15) в працях [28, 29] було узагальнено основні результати В. С. Королюка з монографії [25].

Такий новий погляд на резольвенту виявився корисним і при перенесенні цього методу на довільні процеси з незалежними приростами. Найбільш загальний результат в цьому напрямку був отриманий в роботі [22] для довільного процесу з незалежними приростами $\xi^0(t)$, який обривається в момент першого виходу на від'ємну піввісь, і формулюється таким чином.

Теорема 3. *Для резольвенти* R_λ^0 *довільного процесу з незалежними приростами* $\xi^0(t)$, *який обривається в момент першого виходу на від'ємну піввісь, справедливе зображення*

$$\mathrm{R}_\lambda^0 f(x) = \lambda^{-1} \int_0^x \int_0^\infty f(x-y+t)\, dG_\lambda(t)\, dF_\lambda(y), \tag{16}$$

де

$$F_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{P}\left\{-\inf_{0\le u\le t} \xi(u) < x \,/\, \xi(0) = 0\right\} dt,$$

$$G_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{P}\left\{\sup_{0\le u\le t} \xi(u) < x \,/\, \xi(0) = 0\right\} dt.$$

Дослідження граничних функціоналів з використанням зображення (16) можна знайти в монографії [30].

В роботі [31] метод потенціалу перенесено на клас процесів з незалежними приростами і стрибками одного знаку, заданими на скінченному ланцюгу Маркова. Пізніше ці результати (розвинені і доповнені) склали базу докторської дисертації В. М. Шуренкова.

Метод потенціалу виявився ефективним і при дослідженні граничних функціоналів для сум випадкових величин, заданих на зліченному ланцюгу Маркова [32].

Метод потенціалу застосовувався (і продовжує використовуватись) як його автором, так і іншими дослідниками, до аналізу численних задач з теорії систем обслуговування, математичної теорії ризику, теорії управління запасами і т. п. В цьому зв'язку відмітимо лише роботи [33, 34].

3. Граничні задачі для напівмарковських блукань на суперпозиції двох процесів відновлення. Наступним класом процесів, при дослідженні якого поєднались факторизаційний метод та метод потенціалу, був клас напівмарковських блукань або, як його ще іноді називають, блукання на суперпозиції двох процесів відновлення. Щоб означити цей клас, розглянемо чотири послідовності незалежних в сукупності невід'ємних випадкових величин $\{\alpha_i^1\}$, $\{\alpha_i^2\}$, $\{\xi_i\}$ та $\{\eta_i\}$, $i \ge 1$, які мають однакові розподіли всередині кожної послідовності.

Нехай $\mu_i(t)$, $i = 1, 2,$ — процеси відновлення, пов'язані відповідно з послідовностями $\{\alpha_i^1\}$, $\{\alpha_i^2\}$. Процес

$$\xi(t) = \xi(0) + \sum_{i=1}^{\mu_1(t)} \xi_i - \sum_{i=1}^{\mu_2(t)} \eta_i$$

будемо називати *напівмарковським блуканням.*

Такі блукання є природною математичною моделлю систем обслуговування, процесів запасу та процесів ризику. Складність вивчення таких блукань полягає в тому, що вони не мають, взагалі кажучи, марковських моментів. Такі блукання зустрічалися в працях різних авторів і типова схема їх дослідження полягала в доповненні блукання $\xi(t)$ до трьохкомпонентного марковського процесу $(\xi(t), \kappa(t), \beta(t))$, де компонента $\kappa(t)$ — відстань від t до наступного стрибка процесу $\mu_1(t)$, а компонента $\beta(t)$ — відстань від t до наступного стрибка процесу $\mu_2(t)$. Але при дослідженні граничних функціоналів для $\xi(t)$ така конструкція приводила до необхідності розв'язування рівнянь в області $\{(x, y, z): x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ і крім традиційного методу послідовних наближень немає нічого кращого, що можна було б використати для знаходження потрібного розв'язку. В 1978 р. В. С. Королюк запропонував оригінальний підхід до вивчення таких блукань. Пояснимо коротко його суть.

Нехай ρ_n, $n = 0, 1, \ldots$, $\rho_0 = 0$, — моменти послідовних стрибків процесу $\xi(t)$. Будемо говорити, що момент ρ_n, $n \geq 1$, має тип „1", якщо він є моментом стрибка процесу $\mu_1(t)$, а якщо він є моментом стрибка процесу $\mu_2(t)$, то говоримо, що момент ρ_n має тип „2". Якщо ρ_n — момент стрибка для обох процесів, то будемо вважати, що він також має тип „1". Тип моменту ρ_0 буде залежати від початкових умов.

Нехай подія A_n, $n \geq 0$, означає, що момент ρ_n має тип „1". Покладемо

$$\kappa_n(\omega) = 2 - I\{A_n\},$$

де $I\{A\}$ означає характеристичну функцію множини A, і нехай

$$\nu(n, \omega) = \min\{k > 0:\ \kappa_n \neq \kappa_{n+k}\}.$$

Означимо процеси $\beta(t)$, $\kappa(t)$, поклавши, що при $\rho_n \leq t < \rho_{n+\nu(n,\omega)}$, $n \geq 0$,

$$\beta(t) = \rho_{n+\nu(n,\omega)} - t, \qquad \kappa(t) = \kappa_n;$$

іншими словами, $\beta(\rho_n) = \rho_{n+\nu(n,\omega)} - \rho_n$ — віддаль від моменту ρ_n до найближчого наступного моменту ρ_k, який має інший, ніж ρ_n, тип, а на інтервалі $[\rho_n, \rho_{n+\nu(n,\omega)})$ процес $\beta(t)$ рівний залишковому часу до зміни типу моменту стрибка процесу $\xi(t)$. З цих побудов випливає така лема.

Лема 1. $(\xi_n, \kappa_n, \beta_n) = (\xi(\rho_n), \kappa(\rho_n), \beta(\rho_n))$, $n \geq 0$, *є ланцюгом Маркова з фазовим простором* $R \times \{1, 2\} \times R^+$.

Нехай $F_i(x) = \mathrm{P}\{\alpha_n^i < x\}$, $i = 1, 2$, $G_1(x) = \mathrm{P}\{\xi_n < x\}$, $G_2(x) = \mathrm{P}\{\eta_n < x\}$, а $\Phi(\xi)$ — деякий граничний функціонал для $\xi(t)$. Покладемо

$$V_i(x, u) = \mathrm{E}\left(e^{-\lambda\Phi(\xi)} / \xi(0) = u,\ \kappa_0 = i,\ \beta_0 = x\right), \qquad i = 1, 2, \quad \lambda > 0.$$

Використовуючи лему 1 та формулу повної ймовірності, можемо записати систему інтегральних рівнянь для введених функцій:

$$
\begin{gathered}
V_1(x, u) - \int_0^x \int_0^\infty V_1(x-y, u+v)\, dF_1(y)\, dG_1(v) - \\
- \int_{-\infty}^0 \int_x^\infty V_2(y-x, u-v)\, dF_1(y)\, dG_2(v) = \varphi_+(x, u), \\
V_2(x, u) - \int_{-\infty}^0 \int_0^x e^{-\lambda y} V_2(x-y, u-v)\, dF_2(y)\, dG_2(v) - \\
- \int_x^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda y} V_1(y-x, u+v)\, dF_2(y)\, dG_1(v) = \varphi_-(x, u),
\end{gathered}
\tag{17}
$$

де $u \geq 0$, $x \geq 0$ і $\varphi_\pm(x, u)$ — деякі відомі функції. Природно, що до цієї системи ми ще повинні додати граничні умови, які диктуються функціоналом $\Phi(\xi)$.

Поки що не вдалося знайти загальний розв'язок системи (17) без додаткових припущень стосовно розподілів $F_i(x)$ та $G_i(x)$. Тому вкажемо деякі частинні випадки, коли він відомий: а) $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = 1$, $\mathrm{P}\{\eta_i = k\} = q_k$, $k \geq 0$, б) $\mathrm{P}\{\xi_i > x\} = \exp(-\nu x)$. Зображення для розв'язків в цих частинних випадках, а також їхні численні застосування можна знайти в роботах [23, 35–38].

Використовуючи систему (17), В. С. Королюк дослідив дифузійну апроксимацію, яка виникає в таких схемах блукань [39].

4. Асимптотичні задачі для напівмарковських процесів та основи фазового укрупнення. В 1965 р. під керівництвом В. С. Королюка розгорнулися інтенсивні дослідження з теорії напівмарковських процесів (НМП) та їх застосувань. Він був у числі перших дослідників, які оцінили теоретичне і особливо прикладне значення цих процесів при дослідженні, зокрема, проблеми надійності складних систем. З притаманним йому прагненням до вибору достатньо абстрактної моделі систем, доступної строгому математичному аналізу, він застосував НМП для опису функціонування резервних систем.

Тут слід вказати на розглянуту ним в 1969 р. задачу, яка привела в кінцевому результаті до формування і розвитку нового наукового напрямку — **теорії асимптотичного фазового укрупнення випадкових процесів**. При дослідженні НМП з оператором перехідних імовірностей вигляду

$$P_\varepsilon = P_0 + \varepsilon B,$$

де P_ε і P_0 — матриці перехідних імовірностей збуреного та незбуреного ланцюгів Маркова, виникла необхідність асимптотичного аналізу розв'язків рівнянь типу

$$[I - P_0 + \varepsilon B(s)]\, X_\varepsilon(s) = f(s), \tag{18}$$

особливість якого полягає в тому, що $\det[I - P_0] = 0$ і граничне рівняння $(I - P_0)\, y = f$ не має розв'язків (задача збурення на спектрі).

В 1969 р. В. С. Королюк показав, що асимптотичний розклад розв'язку рівняння (18) можна отримати за допомогою модифікації алгоритму Вішика–Люстерника.

Таким чином, в циклі робіт 1968–1969 рр.:

1) сформульовано нову досить плідну ідею асимптотичного фазового укрупнення;

2) розвинуто новий метод її ефективної реалізації.

В роботі [40] знайдено важливу в багатьох відношеннях формулу для часу перебування НМП в фіксованій підмножині станів. В. С. Королюк та його учні виконали ряд досліджень з теорії НМП [41, 42], з опису функціонування широкого класу систем з резервуванням за допомогою НМП [43], з їх застосування в теорії масового обслуговування [44] і теорії стохастичних автоматів у випадкових середовищах [45].

Роботи [46, 47] поклали початок інтенсивному дослідженню асимптотичних задач для НМП: перша з цих робіт визначила коло практично важливих задач, що підлягають дослідженню, а друга дала метод дослідження таких задач.

В роботі [47] на прикладі асимптотичного розвинення для перетворень часу перебування НМП, що залежить від малого параметра, до поглинання показано ефективність методів теорії збурення операторів на спектрі в асимптотичних задачах для НМП.

Запропонований В. С. Королюком підхід пізніше було з успіхом застосовано до вирішення ряду задач для НМП (див., наприклад, [48]). У вдосконаленому вигляді метод збурення операторів на спектрі є ефективним знаряддям при доведенні граничних теорем для НМП, знаходженні асимптотичних розвинень для багатьох функціоналів адитивного типу [49]. Так, в роботі [50] на прикладі задачі про асимптотичну поведінку ланцюга Маркова до поглинання встановлено зв'язок задач про асимптотичну поведінку НМП, що залежать від параметра, з задачами про сингулярне збурення диференціальних та інтегральних рівнянь. Однією з суттєвих особливостей методу збурення операторів на спектрі є та, що вони не відчувають розмірності задачі та кратності спектра.

Створення алгоритмів укрупнення досить широкого класу складних систем [51], в яких велика розмірність задачі є в певному сенсі позитивним фактором, стало завершенням певного етапу досліджень з асимптотичного аналізу НМП. Простота одержаних тут формул та широка область їх застосування перетворюють алгоритми укрупнення на ефективний метод розрахунку та проектування складних систем.

Результати дослідження НМП, їх асимптотичного фазового укрупнення були викладені в монографіях [52–54], де розглянуто широке коло задач теорії напівмарковських та марковських процесів, теорії обернення збурених на спектрі операторів, теорії сингулярно збурених напівгруп операторів, теорії надійності та ін.

Під час розв'язування цих задач було виявлено та вивчено глибокий зв'язок теорії асимптотичного фазового укрупнення з методами усереднення в теорії диференціальних рівнянь, з методом М. М. Боголюбова скороченого опису неврівноважених систем в статистичній механіці, теорії жорстких систем, з проекційним формалізмом в статистичній фізиці та ін.

5. Теорія випадкових еволюцій та їх застосування. Постійний творчий пошук привів В. С. Королюка на початку 80-х років до необхідності активізувати дослідження випадкових еволюцій та їх багаточисельних застосувань.

Теорія випадкових еволюцій — це напрям сучасної теорії випадкових процесів у нескінченновимірних просторах, що інтенсивно розвивається.

Багато фізичних процесів відбувається у випадковому середовищі. Моделлю еволюції таких процесів є динамічна система, збурена випадковим впливом зовнішнього середовища.

Абстрактною математичною моделлю такої системи є випадкова еволюція (ВЕ), що є розв'язком стохастичного операторного інтегрального рівняння в сепарабельному банаховому просторі.

Серед багатьох методів та ідей, запропонованих В. С. Королюком для дослідження ВЕ, виділимо ті, що сприяли розвитку теорії ВЕ найбільшою мірою, а саме: аналітичні методи в теорії ВЕ, мартингальні методи в теорії ВЕ, застосування ВЕ до різних реальних еволюційних систем, стохастична стійкість еволюційних систем.

5. 1. Випадкові еволюції (ВЕ). Математична модель ВЕ будується за двома процесами:

1) процесом $x(t)$, що описує випадкове середовище (зміну етапів середовища);

2) процесу $V(t)$, що описує еволюцію системи.

Як математичні моделі випадкового середовища $x(t)$ розглядаються напівмарковські процеси, що будуються за процесами марковського відновлення $(X_n, \theta_n, n > 0)$ [55–59], тобто

$$x(t) := x_{\nu(t)}, \quad \nu(t) := \max\{n : \tau_n \le t\};$$

$$\tau_k := \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad \tau_0 = \theta_0 = 0,$$

$X_0 = x \in X$ — фазовий простір станів $x(t)$.

Вибір НМП як математичних моделей випадкового середовища визначається конструктивними можливостями ефективного визначення та аналізу їх з використанням рівнянь марковського відновлення.

Математичні моделі процесів, що описують еволюцію системи, мають напівгрупові властивості, які в абстрактній формі описуються сукупністю стискуючих напівгруп операторів $\Gamma_x(t)$, $t > 0$, залежних від станів зовнішнього середовища $x \in X$. Також можлива стрибкоподібна зміна станів системи в моменти τ_n зміни станів середовища, що описується сукупністю обмежених лінійних операторів $D(x)$, $x \in X$.

Напівмарковська випадкова еволюція (НМВЕ) визначається як розв'язок стохастичного операторного рівняння в сепарабельному банаховому просторі $\{\mathbb{B}, B, \|\cdot\|\}$ [59–62]

$$V(t)f = f + \int_0^t \Gamma(x(s))\, V(s)\, f\, ds + \sum_{k=1}^{\nu(t)} [D(x_k) - I]\, V(\tau_k)\, f \qquad \forall f \in \mathbb{B}, \tag{19}$$

де I — одиничний оператор, $V(\tau_k) = V(\tau_k - 0)$.

Відмітимо, що ВЕ $V(t)$ можна подати у вигляді добутку відповідних напівгруп операторів $\Gamma_x(t)$ та стрибків $D(x)$:

$$V(t)f = \Gamma_{X(t)}(t - \tau_{\nu(t)}) \prod_{k=1}^{\nu(t)} D(x_k)\, \Gamma_{X_{k-1}}(\theta_k)\, f. \tag{20}$$

У відповідності із загальним визначенням ВЕ легко запропонувати їх класифікацію. ВЕ в (19), (20) називають *розривною НМВЕ*.

Якщо $D(x) \equiv I$ $\forall x \in X$, то $V(t)$ називається *неперервною НМВЕ*.

Якщо $\Gamma(x) \equiv 0$ $\forall x \in X$, то $V(t)$ називається *стрибкоподібною НМВЕ*.

ВЕ різняться також за типом процесу, що описує випадкове середовище: напівмарковські (як в (19), (20)), марковські, процеси відновлення і т. д.

ВЕ в моменти τ_n, а саме, $V_n = V(\tau_n)$, називаються *дискретними НМВЕ*.

Розглядаються також *неоднорідні ВЕ*, які задаються неоднорідними напівгрупами операторів $\Gamma_x(s, t)$, $s \le t$, замість однорідних $\Gamma_x(t)$ в (20) [63, 64].

Учень В. С. Королюка А. В. Свіщук розглянув більш загальну модель ВЕ, а саме, мультиплікативні операторні функціонали (МОФ) [65, 66].

5. 2. Усереднення та укрупнення ВЕ [59–62, 67–72]. При побудові математичних моделей реальних стохастичних систем виникають досить складні з практичної точки зору моделі, аналіз яких є недосяжним навіть з використанням сучасної обчислювальної техніки. Тому виникає проблема спрощеного опису системи, що полегшує подальший аналіз.

Спрощений опис еволюції системи оснований на двох вихідних положеннях про поведінку її у напівмарковському (НМ) випадковому середовищі (ВС) — ергодичності ВС та стаціонарності еволюції системи.

Умова ергодичності ВС дозволяє усереднити вплив випадкових факторів середовища, а спостереження за еволюцією системи в стаціонарному режимі — виділити достатньо прості закономірності, які характеризують спрощену поведінку системи.

Ефективним апаратом спрощеного типу еволюції є *граничні теореми усереднення* в схемі серій. Ефект усереднення НМВЕ виникає, коли на скінченному інтервалі часу відбувається достатньо велике число змін станів НМП. Доведення *граничних теорем усереднення* для НМВЕ містить розв'язок двох проблем: встановлення вигляду граничної усередненої еволюції та компактності вихідної сукупності ВЕ в схемі серій (див. п. 5.4).

Для розв'язування першої проблеми В. С. Королюк запропонував асимптотичний аналіз рівнянь марковського відновлення (РМВ) з малим параметром для перетворень Лапласа за часом від середнього значення вихідної еволюції. Для цього використовуються граничні теореми обернення збурених на спектрі звідно-оборотних операторів [54, 59, 60, 71]. Вигляд граничного оператора, що визначає усереднену еволюцію, виникає природним чином при обчисленні головної частини збурення.

Таким чином, ефект усереднення НМВЕ суттєво залежить від вихідних положень про ергодичності ВС, а саме НМП. Якщо розглядати схему укрупнення НМП у звідному фазовому просторі станів (ФПС) [57, 67 – 69], то ця схема приводить до граничного марковського процесу в укрупненому ФПС. Усереднення НМВЕ з НМП у зведеному ФПС приводить до НМВЕ з марковськими перемиканнями в укрупненому ФПС, тобто до *укрупнених НМВЕ* [57, 67 – 69].

Теореми, аналогічні теоремам усереднення та укрупнення для НМВЕ, справедливі для неоднорідних НМВЕ [63, 64].

Для розв'язування другої проблеми, а саме, компактності ВЕ в схемі усереднення та укрупнення, А. В. Свіщук запропонував мартингальний метод доведення слабкої збіжності ВЕ в схемі серій [73, 74]. Отримано зображення напівмарковських ВЕ як МОФ від НМП. Крім того, мартингальний підхід дозволив отримати оцінки швидкості збіжності в схемах усереднення та укрупнення [75].

5. 3. Дифузійна апроксимація ВЕ [57 – 62, 64, 76, 77]. Застосування алгоритмів фазового усереднення НМВЕ базується на наближеній рівності вихідної $V_T(t) := V(tT)$ та усередненої $\hat{V}(t)$ еволюції: $V_T(t) \approx \approx \hat{V}(t)$ при певному виборі масштабного множника $T > 0$. При використанні наближеної рівності природно виникає нова проблема вивчення флуктуацій вихідної еволюції $V_T(t)$ по відношенню до усередненої $\hat{V}(t)$, тобто вивчення асимптотичної поведінки різниці $V_T(t) - \hat{V}(t)$, коли $T \to +\infty$. Так виникає проблема дифузійної апроксимації НМВЕ в схемі серій.

При виконанні додаткових умов балансу НМВЕ в схемі серій допускають апроксимацію дифузійними процесами. Як і в граничних теоремах усереднення, виникають дві проблеми: встановлення вигляду граничної дифузії та компактності вихідної еволюції в схемі серій. Для розв'язування першої проблеми В. С. Королюк запропонував використати асимптотичний аналіз РМВ з малим параметром для перетворень Лапласа за часом від середнього значення вихідної еволюції.

Вигляд граничного оператора, що задає граничну дифузію, встановлюється із застосуванням граничних теорем обернення збурених на спектрі звідно-обернених операторів. Тут вигляд граничного оператора виникає природно при обчисленні головної частини збурення у вихідному РМВ.

Дифузійна апроксимація в даному випадку є *ергодичною*, оскільки ергодичним є НМП, що описує випадкове середовище.

Якщо розглядати дифузійну апроксимацію НМВЕ в схемі фазового укрупнення НМП, що описують укрупнений марковський процес в укрупненому ФПС, то виникає новий клас НМВЕ за певних умов балансу. А саме, ефект укрупнення НМП приводить до того, що граничною НМВЕ буде дифузійний процес з марковськими перемиканнями (випадкове середовище — укрупнений марковський процес) в укрупненому фазовому просторі станів.

Теореми про дифузійну апроксимацію залишаються справедливими також і для неоднорідних НМВЕ [61, 64].

Для розв'язування другої проблеми, а саме, компактності ВЕ в дифузійній апроксимації, А. В. Свіщук запропонував мартингальний метод доведення слабкої збіжності ВЕ в схемі серій [74].

Крім того, мартингальний підхід дозволив отримати оцінки швидкості збіжності в центральних граничних теоремах в схемі усереднення та укрупнення НМВЕ [74, 75].

5. 4. Компактність ВЕ в схемі серій [59 – 62, 78, 79]. Компактність ВЕ в схемі серій є однією з двох проблем, що виникають при доведенні граничних теорем усереднення, укрупнення та дифузійної апроксимації для НМВЕ.

Компактність ВЕ в схемах усереднення та укрупнення встановлюється із застосуванням мартингального підходу, запропонованого в роботах [73, 74, 80]. При цьому слабка збіжність НМВЕ в схемі серій випливає із компактності спеціально сконструйованих мартингалів з урахуванням раніше отриманих алгоритмів фазового усереднення та укрупнення (див. п. 5. 2).

Компактність ВЕ в дифузійній апроксимації при виконанні умови балансу доводиться за допомогою побудови спеціально сконструйованих мартингалів з урахуванням раніше отриманого вигляду граничного оператора (див. п. 5. 3). При цьому виникає мартингальна проблема для операторнозначних процесів.

А. В. Свіщуком було розв'язано мартингальну проблему для напівмарковських ВЕ в схемі усереднення, укрупнення та дифузійної апроксимації [81].

Компактність ВЕ в схемі серій доводиться з використанням критеріїв компактності процесів із значеннями в сепарабельному банаховому просторі. Суттєвою є умова компактної належності, тобто наявності компактної множини в банаховому просторі. В конкретних інтерпретаціях та застосуваннях ВЕ виконання умови компактної належності досягається побудовою гільбертового простору, компактно вкладеного в даний банахів простір.

Застосування мартингальних методів до вивчення ВЕ дозволило не тільки вирішити проблеми компактності ВЕ в схемі серій, але і знайти зображення граничних еволюцій в теоремах усереднення, укрупнення та дифузійної апроксимації [60, 61, 66, 79].

5. 5. Застосування ВЕ до реальних еволюційних стохастичних систем. ВЕ служить абстрактною математичною моделлю багатьох реальних стохастичних систем. Значне місце серед публікацій із ВЕ займають якраз роботи із застосувань ВЕ.

Алгоритми фазового усереднення, укрупнення та дифузійної апроксимації, що подаються у вигляді абстрактної НМВЕ, застосовуються до стохастичних моделей систем у напівмарковському випадковому средовищі.

Розглядається застосування граничних теорем для ВЕ до процесів запасання, переносу, гіллястих та дифузійних, U-статистичних, випадкових рухів на групах Лі, поширення хвиль у хвильоводах та брусках, а також коливань гармонічного осцилятора у випадковому середовищі [54, 55, 59 – 62, 71, 82].

В реальних еволюційних стохастичних системах, що є інтерпретаціями ВЕ, виконання умови компактної належності досягається побудовою гільбертового простору, компактно вкладеного в даний банахів простір. При цьому суттєво використовується теорема Соболева про компактні вкладення [59 – 61].

Подальше застосування ВЕ було запропоновано в роботах А. В. Свіщука і пов'язане із стохастичними моделями фінансової та актуарної математики. Було встановлено, що певні класи ВЕ та їх реалізацій є моделями фінансової та актуарної математики у неповному ринку, що відповідає поведінці або еволюції стохастичної системи у випадковому середовищі. Роль випадкового середовища відіграють випадкові або непередбачувані події, фактори, явища і т. д. [66].

Динаміка вартості акції або облігації у фінансовій математиці описується лінійними стохастичними диференціальними рівняннями із коефіцієнтами повернення та мінливості, що залежать від НМП [66] (розділ 5). Це відповідає моделі (B, S, X)-неповного ринку цінних паперів, на відміну від (B, S)-ринку (або моделі Блека – Скоулса), де ці коефіцієнти є константами.

Процес динаміки капіталу страхової компанії в актуарній математиці описується процесом ризику, коефіцієнти якого (виплати та внески) залежать від НМП, що також відіграє роль випадкового середовища [83].

5. 6. Стохастична стійкість еволюційних систем. Асимптотичний аналіз еволюційних стохастичних систем розвивається головним чином у двох напрямках:

1) аналіз стохастичних систем в схемі серій — усереднення, укрупнення та дифузійної апроксимації, як це було відмічено в попередніх пунктах;

2) дослідження систем на зростаючому часовому проміжку часу — проблеми стійкості.

Перший тип проблем привів до створення теорії усереднення еволюційних стохастичних систем, другий — до створення теорії стійкості.

В. С. Королюк запропонував розглядати спільно проблему стійкості для еволюційних стохастичних систем і аналіз системи на зростаючому проміжку часу при усередненні, укрупненні чи дифізійній апроксимації [84 – 86].

Задача стійкості вихідної стохастичної системи розглядається за умови стійкості усередненої, укрупненої чи дифузійної системи.

Одержано достатні умови стійкості еволюційної стохастичної системи із швидкими марковськими перемиканнями за умов стійкості усередненого [84, 85] та дифузійного процесу [86] з використанням розв'язку проблеми сингулярного збурення.

Основний підхід полягає у використанні збуреної функції Ляпунова у вигляді розв'язку сингулярно збуреної задачі для звідно-оберненого оператора.

Такий підхід також було застосовано до вивчення стійкості напівмарковських еволюційних систем в схемах усереднення та дифузійної апроксимації [87].

Теорія стійкості ВЕ для моделей фінансової та актуарної математики вивчалась в роботах А. В. Свіщука та його учнів [88, 89].

1. *Гнеденко Б. В., Королюк В. С.* Декілька зауважень до теорії областей притягання стійких розподілів // Допов. АН УРСР. – 1950. – № 4. – С. 275–278.
2. *Гнеденко Б. В., Королюк В. С.* О максимальном расхождении двух эмпирических распределений // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**, № 4. – С. 525–528.
3. *Королюк В. С.* О критериях согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1954. – 7 с.
4. *Королюк В. С.* Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова // Докл. АН СССР. – 1954. – **95**, № 3. – С. 443–446.
5. *Королюк В. С.* Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**, № 2. – С. 103–124.
6. *Королюк В. С.* Асимптотические разложения для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли // Докл. АН СССР. – 1956. – **108**, № 2. – С. 183–186.
7. *Королюк В. С.* Асимптотические разложения некоторых функционалов от сумм случайных величин // Тр. III Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь – июль 1956 г.). – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – **2**. – С. 47.
8. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – **4**, вып. 4. – С. 369–397.

9. *Королюк В. С.* Асимптотичний аналіз імовірності збирання в одномірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу // Допов. АН УРСР. – 1959. – № 7. – С. 702–707.
10. *Королюк В. С.* Об асимптотике некоторых функционалов в двумерной схеме блуждания // Докл. АН СССР. – 1960. – **135**, № 3. – С. 520–523.
11. *Королюк В. С.* Об асимптотике распределений в схеме блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода: [Рез. докл. на совещ. по предельным теоремам теории вероятностей. Ужгород, 28 сент.–2 окт. 1959 г.] // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – **5**, вып. 2. – С. 255–256.
12. *Королюк В. С.* Об асимптотике некоторых функционалов в решетчатой схеме блуждания: [Рез. докл. на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Моск. ун-та, 19 окт. 1960 г.] // Там же. – 1961. – **6**, вып. 3. – С. 334–341.
13. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в решетчатой схеме блуждания // Там же. – 1962. – **7**, вып. 4. – С. 393–409.
14. *Королюк В. С.* К асимптотике распределений максимальных уклонений // Докл. АН СССР. – 1962. – **142**, № 3. – С. 522–525.
15. *Королюк В. С., Гусак Д. В.* К асимптотике распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 2. – С. 138–144.
16. *Королюк В. С.* Асимптотический анализ в граничных задачах случайных блужданий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1963. – 19 с.
17. *Королюк В. С.* Асимптотика некоторых функционалов в граничных задачах двумерного случайного блуждания // Предельные теоремы теории вероятностей. – Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963. – С. 43–48.
18. *Гусак Д. В.* К асимптотике распределения времени первого выхода процесса с независимыми приращениями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1964. – 14 с.
19. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О моменте первого прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1967. – **13**, № 3. – С. 471–478.
20. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О совместном распределении процесса со стационарными приращениями и его максимума // Там же. – 1969. – **14**, № 3. – С. 421–430.
21. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – **1**. – С. 55–73.
22. *Братийчук Н. С., Королюк В. С.* Резольвента однородного процесса с независимыми приращениями с обрывом на полуоси // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, № 2. – С. 368–372.
23. *Братийчук Н. С., Пирлиев Б.* Величина перескока уровня для случайного блуждания на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1985. – **35**, № 6. – С. 689–695.
24. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 250 с.
25. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
26. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. – Киев: Наук. думка, 1981. – 240 с.
27. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **21**, № 2. – С. 253–259.
28. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 170–174.
29. *Супрун В. Н.* Задача о разорении и резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 1. – С. 53–61.
30. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 263 с.
31. *Королюк В. С., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Марова // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 4. – С. 464–471.
32. *Братийчук Н. С.* Исследования в граничных задачах для случайных процессов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 32 с.
33. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Метод потенциала в задачах теории массового обслуживания // Теория массового обслуживания: Тр. III Всесоюз. шк.-совещ. по теории массового обслуживания (Пущино-на-Оке). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – **1**. – С. 119–127.
34. *Бутко Т. К., Королюк В. С.* Метод потенциала в исследовании системы обслуживания $GI/M/1/\infty$ // Аналитические методы в задачах теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 16–27.

35. *Королюк В. С., Пирлиев Б.* Случайное блуждание на полуоси на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 433–436.
36. *Пирджанов Б.* Случайное блуждание, порожденное двумя процессами восстановления // Там же. – 1978. – **30**, № 5. – С. 680–685.
37. *Bratiychuk M. S.* Limit theorems for some charasteristics of system $GI/GI/1$ // Exploring Stochastic Laws. – Netherlands: VSP, 1995. – P. 77–90.
38. *Bratiychuk M. S., Pirdjanov B.* On a new approach in studying the busy period of system $GI/G/1$ // Proc. 6th USSR–Japan Symp. Probab. Theory and Math. Statist. (Kiev, August 5–10, 1991). – Singapore: World Sci., 1992.
39. *Korolyuk V. S.* Semi-markov random walk // Proc. 2nd Int. Symp. Markov Models: Theory and Appl. – 1998. – P. 1–14.
40. *Королюк В. С.* Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 3. – С. 123–128.
41. *Ежов И. И., Королюк В. С.* Полумарковские процессы и их приложения // Кибернетика. – 1967. – № 5. – С. 58–65.
42. *Томусяк А. А.* Вычисление эргодического распределения марковских и полумарковских процессов // Там же. – 1969. – № 1. – С. 67–71.
43. *Королюк В. С., Томусяк А. А.* Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов // Там же. – 1965. – № 5. – С. 55–59.
44. *Симонова С. Н.* О многолинейной системе с потерями с входящим полумарковским потоком требований // Там же. – 1967. – № 6. – С. 48–53.
45. *Валах В. Я., Королюк В. С.* Стохастические автоматы со случайным временем реакции и их функционирование в случайных средах // Тр. IV Всесоюз. совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике). – Тбилиси, 1968. – С. 102–103.
46. *Королюк В. С., Полищук Л. И., Томусяк А. А.* Об одной предельной теореме для полумарковских процессов // Кибернетика. – 1969. – № 4. – С. 144–145.
47. *Королюк В. С.* Об асимптотическом поведении времени пребывания процесса в подмножестве состояний // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 6. – С. 842–845.
48. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – **2**. – С. 133–143.
49. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Об одном методе доказательства предельных теорем для некоторых функционалов от полумарковских процессов // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 2. – С. 234–239.
50. *Королюк В. С., Пенев И. П., Турбин А. Ф.* Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения цепи Маркова // Кибернетика. – 1973. – № 4. – С. 133–135.
51. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Укрупнение сложных систем // Математизация знаний и научно-технический прогресс. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 46–65.
52. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
53. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем: Метод. пособие. – Киев: Выща шк., 1978. – 112 с.
54. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 220 с.
55. *Королюк В. С.* Эволюция систем в полумарковской случайной среде // Кибернетика. – 1987. – № 5. – С. 106–109.
56. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Фазовое усреднение неоднородных полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 163–170.
57. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Предельные теоремы для полумарковских эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения. – Киев, 1984. – 12 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 84.16).
58. *Королюк В. С., Свищук А. В., Королюк В. В.* Центральная предельная теорема в схеме фазового укрупнения для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 314–319.
59. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Semi-Markov random evolutions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. – 310 p.
60. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
61. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – Florida: CRC Press, 1995. – 255 p.
62. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Эволюционные стохастические системы в случайной среде. – Киев: Наук. думка, 1995. – 260 с.
63. *Королюк В. С.* Фазовое усреднение неоднородных полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 163–170.

64. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Центральная предельная теорема для неоднородных полумарковских случайных эволюций // Там же. – № 8. – С. 1064–1070.
65. *Свищук А. В.* Представление мультипликативных операторных функционалов от полумарковских процессов // Докл. АН УССР. – 1988. – № 10. – С. 27–28.
66. *Swishchuk A. V.* Random evolutions and their applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 215 p.
67. *Korolyuk V. S., Turbin A. F., Swishchuk A. V.* Limit theorems for Markov random evolutions // Proc. 6th USSR–Japan Symp. Probab. Theory and Math Statist.: Abstrs (Tbilisi, Aug. 23–29, 1982). – Tbilisi, 1982. – 2. – P. 39–40.
68. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Фазовое укрупнение полумарковских случайных эволюций // Стохастическая оптимизация: Тез. докл. междунар. конф. (Киев, 9–16 сент. 1984 г.). – Киев, 1984. – С. 127–129.
69. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Phase merging of semi-Markov random evolutions and storage theory // Abstrs. IV Vilnius Conf. Probab. Theory and Math. Statist. – Vilnius, Mosklas, 1985. – 2. – P. 62–64 (In Russian).
70. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Semi-Markov random evolutions. Phase agregations and applications // Proc. V Int. summer School Theory Probab. and Math. Statist. (Varna, 1985). – Sofia, 1988. – P. 116–131.
71. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
72. *Королюк В. С.* Стохастичні моделі систем. – Київ: Либідь, 1993. – 138 с.
73. *Свищук А. В.* Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения (мартингальный подход) // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1680–1686.
74. *Свищук А. В.* Мартингальный подход к полумарковским случайным эволюциям // Тр. научн. конф. мол. ученых и специалистов (Ин-т математики АН УССР, Киев, 24–26 нояб. 1986 г.). – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – 2 с.
75. *Свищук А. В.* Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для полумарковских случайных эволюций // Стохастические системы и их применения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 86–92.
76. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 330–334.
77. *Korolyuk V. S.* CLT for semi-Markov random evolutions // Comp. Math. Appl. – 1990. – **19**, № 1. – P. 83–88.
78. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1990. – **42**. – С. 53–64.
79. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Предельное представление полумарковских случайных эволюций в схеме серий // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1476–1482.
80. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Weak convergence of semi-Markov random evolutions (martingale approach) // Probab. Theory and Math. Statist. – 1990. – **1**. – P. 1–9.
81. *Свищук А. В.* Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций // Асимптотические и прикладные задачи теории случайных эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 98–107.
82. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Прикладные задачи теории случайных эволюций. – Киев: О-во „Знание" УССР, 1990. – 32 с.
83. *Swishchuk A. V.* Approximation and ruin problem for semi-Markov risk processes. – Kiev, 1996. – 20 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math. № 96/20).
84. *Королюк В. С.* Устойчивость автономных динамических систем с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 1176–1181.
85. *Korolyuk V. S.* Averaging and stability of dynamical systems with rapid Markov switchings. – Umea, 1991. – 16 p. – (Preprint / Univ. Umea, Sweden).
86. *Королюк В. С.* Устойчивость стохастических систем в схеме аппроксимации // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36–47.
87. *Свіщук А. В.* Стійкість напівмарковських еволюційних систем в схемах усереднення та дифузійної апроксимації // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 255–269.
88. *Свіщук А. В., Бурдейний А. Г.* Стійкість напівмарковських еволюційних систем та її застосування у фінансовій математиці // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 10. – С. 1386–1401.
89. *Свіщук А. В., Гончарова С. Я.* Стійкість напівмарковських процесів ризику в схемах усереднення та дифузійної апроксимації // Там же. – 1999. – **51**, № 7. – С. 972–979.

Одержано 14.04.2000