УДК 517.91

В. Е. Слюсарчук (Ривнэн. техн. ун-т)

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

The Cauchy problem is studied for differential equations with pulse influence in the general case.

Вивчається задача Коші для диференціальних рівнянь з імпульсною дією в загальному випадку.

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, $L(E)$ — банахова алгебра всех линейных непрерывных операторов $A: E \to E$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ и T — счетное подмножество интервала $(0, +\infty)$.

В теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием важную роль играет задача о существовании и единственности решений следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus T, & (1) \\ \Delta x(t) = B(t)x(t-0) + g(t), \quad t \in T, & (2) \\ x(0) = x_0, & (3) \end{cases}$$

где $A: \mathbb{R}^+ \setminus T \to L(E)$, $f: \mathbb{R}^+ \setminus T \to E$ — произвольные непрерывные отображения, для которых конечен интеграл $\int_0^t (\|A(t)\|_{L(E)} + \|f(t)\|_E)\,dt$ для каждого $t > 0$, $B: T \to L(E)$, $g: T \to E$ — произвольные отображения, для которых конечна сумма $\sum_{0<s<t} (\|B(s)\|_{L(E)} + \|g(s)\|_E)$ для каждого $t > 0$, если $(0, t) \bigcap T \neq \varnothing$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t-0)$, $x_0 \in E$.

Эта задача легко решается, если T является множеством изолированных точек. В этом случае сформулированная задача согласно [1] равносильна задаче о существовании и единственности решений уравнения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t (A(s)x(s) + f(s))\,ds +$$
$$+ \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} (B(s)x(s-0) + g(s)), \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

Здесь слагаемое $\sum_{s \in T \bigcap (0,t)} (B(s)x(s-0) + g(s))$ считается равным 0, если $T \bigcap (0, t) = \varnothing$ или $t = 0$.

В случае непустого множества предельных точек множества T нельзя воспользоваться результатами работы [1] для изучения свойств решений задачи (1) – (3). Однако в этом случае легко убедиться в том, что рассматриваемые задачи для системы (1) – (3) и для уравнения (4) равносильны.

Несмотря на относительно большое число работ, посвященных построению общей теории таких уравнений (см., например, [2 – 7]), задача о существовании и единственности решений этих уравнений в основном решается с помощью теории обобщенных функций (в частности, меры), как, например, в [2, 7], или с помощью аппроксимации дискретной части уравнений конечными суммами (см., например, [6]) с последующим применением теоремы Хелли [8] (в последнем случае возможно применение результатов из [1]). Однако использование этих подходов для получения общих результатов о существовании решений рассматриваемых и более общих уравнений сопряжено с рядом трудностей.

В статье предложен метод доказательства существования решений более общих систем и уравнений, чем (1) – (3) и (4). В его основе лежат одно свойство интеграла Лебега – Стильтьеса и свойства c-непрерывных операторов.

1. Основные векторные пространства и уравнение. Обозначим через Λ множество всех конечных подмножеств $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ отрезка $[a, b]$, для каждого из которых $a = t_0 < t_1 \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Каждой определенной на $[a, b]$ функции $y = y(t)$ со значениями в банаховом пространстве X и каждому $\tau \in \Lambda$ поставим в соответствие число

$$\nu(y, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \|y(t_{k+1}) - y(t_k)\|_X .$$

Будем говорить, что функция $y(t)$ имеет конечное изменение на $[a, b]$, если $\sup\limits_{\tau\in\Lambda} \nu(y, \tau) < \infty$. В этом случае величину $\sup\limits_{\tau\in\Lambda} \nu(y, \tau)$ будем называть изменением (вариацией) функции $y = y(t)$ на $[a, b]$ и обозначать через $\bigvee\limits_a^b [y]$. Если $b = +\infty$, то под $\bigvee\limits_a^{+\infty} [y]$ понимаем предел $\lim\limits_{c\to+\infty} \bigvee\limits_a^c [y]$.

Пусть $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$ — векторное пространство всех определенных на $\mathbb{R}^+$, непрерывных в точке 0 и непрерывных слева на $(0, +\infty)$ функций со значениями в банаховом пространстве X и $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, X)$ — векторное пространство всех функций $y(t) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$, для которых $\bigvee\limits_0^b [y] < \infty$ при всех $b > 0$.

Обозначим через $V(\mathbb{R}^+, X)$ банахово пространство всех функций $y(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, X)$, для каждой из которых $\bigvee\limits_0^{+\infty} [y] < \infty$, с нормой

$$\|y\|_{V(\mathbb{R}^+, X)} = \|y(0)\|_X + \bigvee_0^{+\infty} [y].$$

Основным объектом исследования является уравнение

$$x(t) = (\mathfrak{A}x)(t) + h(t), \qquad t \geq 0, \tag{5}$$

где $h(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ и оператор $\mathfrak{A} : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E) \to \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E)$ является липшицевым.

Нас интересует в основном вопрос о существовании и единственности решений уравнения (5). Чтобы дать ответ на этот вопрос, приведем сначала некоторые результаты, представляющие и самостоятельный интерес.

2. Вспомогательные утверждения. Лемма 1. *Пусть $\beta(t)$ — неубывающая на $\mathbb{R}^+$ непрерывная слева на $(0, +\infty)$ функция. Тогда для интегралов Лебега – Стильтьеса*

$$I_n(\tau, s) = \int_\tau^s I_{n-1}(\tau, s_1)\, d\beta(s_1), \qquad n \geq 2, \tag{6}$$

где

$$I_1(\tau, s) = \int_\tau^s d\beta(s_1), \qquad 0 \leq \tau < s < \infty,$$

имеет место оценка

$$I_n(\tau, s) \leq \frac{(\beta(s) - \beta(\tau))^n}{n!}, \qquad n \geq 1. \tag{7}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 0$ и $\beta(0) = 0$ (к этому случаю мы приходим после замены переменной интегрирования s_1 и функции $\beta(s_1)$ соответственно на $s_1^* = s_1 - \tau$ и $\beta^*(s_1^*) = \beta(s_1^* + \tau) - \beta(\tau)$).

Сначала докажем, что справедливо неравенство

$$\int_0^s \beta^k(t)\,d\beta(t) \le \frac{\beta^{k+1}(s)}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Выберем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и покроем множество значений функции $\beta^k(t)$, $t \in [0, s)$, интервалами $[a_0, a_0 + \varepsilon]$, $(a_1, a_1 + \varepsilon]$, $(a_2, a_2 + \varepsilon]$, $\ldots$, $(a_m, a_m + \varepsilon]$, $(a_{m+1}, \beta^k(s)]$.

В рассматриваемом случае $a_0 = 0$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ выбраны так, чтобы интервалы не имели общих точек и каждый имел непустое пересечение с $\{\beta^k(t): t \in [0, s]\}$. Рассмотрим множества

$$E_0^\varepsilon = \{t: \beta^k(t) \in [a_0, a_0 + \varepsilon]\},$$
$$E_l^\varepsilon = \{t: \beta^k(t) \in (a_l, a_l + \varepsilon]\}, \quad l = \overline{1, m},$$
$$E_{m+1}^\varepsilon = \{t: \beta^k(t) \in (a_{m+1}, \beta^k(s))\}.$$

Поскольку функция $\beta(t)$ непрерывна слева на $(0, s)$, то найдется множество $\{t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}\} \subset [0, s)$ такое, что

$$E_0^\varepsilon = [0, t_1],$$
$$E_l^\varepsilon = (t_l, t_{l+1}], \quad l = \overline{1, m},$$
$$E_{m+1}^\varepsilon = (t_{m+1}, \varepsilon).$$

Заметим, что t_1 может совпадать с 0, если функция $\beta(t)$ разрывна в точке 0 и скачок функции в этой точке больше ε.

Пусть μE_l^ε — мера Стильтьеса множества E_l^ε. Из определения интеграла Лебега – Стильтьеса [9] вытекает, что

$$\int_0^s \beta^k(t)\,d\beta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{l=0}^{m+1} a_l \mu E_l^\varepsilon. \tag{9}$$

Поскольку

$$\mu[0, t_1] = \beta(t_1 + 0) - \beta(0),$$
$$\mu(t_l, t_{l+1}] = \beta(t_{l+1} + 0) - \beta(t_l + 0), \quad l = \overline{1, m},$$
$$\mu(t_{m+1}, s) = \beta(s) - \beta(t_{m+1} + 0),$$

то

$$\sum_{l=0}^{m+1} a_l \mu E_l^\varepsilon = a_0\big(\beta(t_1 + 0) - \beta(0)\big) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} a_l\big(\beta(t_{l+1} + 0) - \beta(t_l + 0)\big) + a_{m+1}\big(\beta(s) - \beta(t_{m+1} + 0)\big). \tag{10}$$

Заметим, что

$$a_0 = \beta^k(0) = 0 \le \frac{\beta^{k+1}(t_1+0)}{k+1},$$

$$a_l \le \beta^k(t_l+0) \le \frac{1}{k+1}\big(\beta^k(t_l+0)+\beta^{k-1}(t_l+0)\beta(t_{l+1}+0) +$$

$$+ \beta^{k-2}(t_l+0)\beta^2(t_{l+1}+0)+\ldots+\beta^k(t_{l+1}+0)\big), \qquad l = \overline{1,m},$$

$$a_{m+1} \le \beta^k(t_{m+1}+0) = \frac{1}{k+1}\big(\beta^k(t_{m+1}+0)+\beta^{k-1}(t_{m+1}+0)\beta(s) +$$

$$+ \beta^{k-2}(t_{m+1}+0)\beta^2(s)+\ldots+\beta^k(s)\big).$$

Поэтому имеем

$$a_0(\beta(t_1+0)-\beta(0)) \le \frac{\beta^{k+1}(t_1+0)}{k+1},$$

$$a_l(\beta(t_{l+1}+0)-\beta(t_l+0)) \le \frac{1}{k+1}\big(\beta^k(t_l+0) +$$

$$+ \beta^{k-1}(t_l+0)\beta(t_{l+1}+0)+\beta^{k-2}(t_l+0)\beta^2(t_{l+1}+0)+\ldots$$

$$\ldots+\beta^k(t_{l+1}+0)\big(\beta(t_{l+1}+0)-\beta(t_l+0)\big) = \frac{1}{k+1}\big(\beta^{k+1}(t_{l+1}+0)-\beta^{k+1}(t_l+0)\big)$$

и аналогично

$$a_{m+1}(\beta(s)-\beta(t_{m+1}+0)) \le \frac{1}{k+1}\big(\beta^{k+1}(s)-\beta^{k+1}(t_{m+1}+0)\big).$$

Учитывая эти сотношения и равенство (10), получаем

$$\sum_{l=0}^{m+1} a_l \mu E_l^{\varepsilon} \le \frac{1}{k+1}\big(\beta^{k+1}(t_1+0)+\big(\beta^{k+1}(t_2+0)-\beta^{k+1}(t_1+0)\big) +$$

$$+ \big(\beta^{k+1}(t_3+0)-\beta^{k+1}(t_2+0)\big)+\ldots+\big(\beta^{k+1}(t_{m+1}+0)-\beta^{k+1}(t_m+0)\big) +$$

$$+ \big(\beta^{k+1}(s)-\beta^{k+1}(t_{m+1}+0)\big) = \frac{\beta^{k+1}(s)}{k+1}.$$

Итак,

$$\sum_{l=0}^{m+1} a_l \mu E_l^{\varepsilon} \le \frac{\beta^{k+1}(s)}{k+1}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Отсюда и из (9) следует соотношение (8).

Учитывая (8), (6) и то, что $I_1(0,s) = \beta(s)$ при $\beta(0) = 0$, убеждаемся с помощью метода математической индукции в справедливости соотношения (7) при $\tau = 0$ и $\beta(0) = 0$.

Лемма 1 доказана.

Аналогичным образом устанавливается более общее, чем лемма 1, утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\gamma(t)$ — неубывающая на $\mathbb{R}^+$ и непрерывная слева на $(0, +\infty)$ функция. Тогда для функций $I_n(\tau,s)$, $n \ge 1$, для которых*

$$0 \le I_n(\tau,s) \le \int_{\tau}^{s} I_{n-1}(\tau,s_1)\,d\gamma(s_1), \qquad n \ge 2,$$

$$0 \le I_1(\tau, s) \le \int\limits_{\tau}^{s} d\gamma(s_1), \quad 0 \le \tau < s < +\infty,$$

имеет место оценка

$$I_n(\tau, s) \le \frac{\left(\bigvee\limits_{\tau}^{s}[\gamma(s)]\right)^n}{n!}, \quad n \ge 1.$$

Заметим, что утверждения этого пункта и их дискретные аналоги полезны для теории квазинильпотентных операторов [10].

3. Общая теорема. Будем говорить, что последовательность функций $y_n(t) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$, $n \ge 1$, локально сходится к функции $y(t) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$, и писать $y_n(t) \xrightarrow{\text{лок}} y(t)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le a} \|y_n(t) - y(t)\|_X = 0$$

для каждого $a > 0$.

Аналогично, как и в [11, 12], будем называть оператор $\mathfrak{B}: \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X) \to \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$ c-непрерывным, если

$$(\mathfrak{B}y_n)(t) \xrightarrow{\text{лок}} (\mathfrak{B}y)(t)$$

для каждых функции $y(t) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$ и последовательности $y_n(t) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, X)$, $n \ge 1$, для которых $y_n(t) \xrightarrow{\text{лок}} y(t)$.

Введенные понятия используем для обоснования следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (5) *оператор* $\mathfrak{A} : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E) \to \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ *удовлетворяет условию*

$$\|(\mathfrak{A}y)(t) - (\mathfrak{A}z)(t)\|_E \le \int\limits_0^t \|y(s) - z(s)\|_E \, d\beta(s) \tag{11}$$

для всех $y, z \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E)$ *и* $t \ge 0$, *где* $\beta(t)$ — *неубывающая на* $\mathbb{R}^+$ *функция из* $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. *Тогда это уравнение для каждой функции* $h(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ *имеет единственное решение* $x(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$u_n(t) = (\mathfrak{A}u_{n-1})(t) + h(t), \quad n \ge 1, \tag{12}$$

и разности $\Delta u_n(t) = u_{n+1}(t) - u_n(t)$, $n \ge 0$, где $u_0(t) = h(t)$. Тогда

$$\Delta u_0(t) = (\mathfrak{A}h)(t), \quad t \ge 0, \tag{13}$$

и на основании (12) и соотношения (11) имеем

$$\|\Delta u_n(t)\|_E \le \int\limits_0^t \|\Delta u_{n-1}(s)\| \, d\beta(s), \quad n \ge 1, \quad t \ge 0.$$

Поэтому согласно лемме 2 и оценке

$$\|\Delta u_1(t)\|_E \le \left(\int\limits_0^t d\beta(s)\right)\left(\|(\mathfrak{A}h)(0)\|_E + \bigvee\limits_0^t [\mathfrak{A}h]\right),$$

вытекающей из (11) с учетом (13), выполняется соотношение

$$\|\Delta u_n(t)\|_E \le \frac{(\beta(t)-\beta(0))^n}{n!}\left(\|(\mathfrak{A}h)(0)\|_E + \bigvee_0^t[\mathfrak{A}h]\right) \tag{14}$$

для всех $n \ge 0$ и $t \ge 0$. Это соотношение обеспечивает сходимость на $\mathbb{R}^+$ функционального ряда

$$h(t) + \Delta u_0(t) + \Delta u_1(t) + \Delta u_2(t) + \ldots + \Delta u_n(t) + \ldots \tag{15}$$

и принадлежность суммы этого ряда векторному пространству $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E)$.

Пусть $y(t)$ — сумма ряда (15) и

$$y_n(t) = h(t) + \Delta u_0(t) + \Delta u_1(t) + \Delta u_2(t) + \ldots + \Delta u_n(t).$$

Тогда $y_n(t) = u_{n+1}(t)$ и поэтому на основании (14)

$$u_n(t) \xrightarrow{\text{лок}} y(t). \tag{16}$$

Поскольку оператор $\mathfrak{A}$ является c-непрерывным в силу (11), то

$$(\mathfrak{A}u_n)(t) \xrightarrow{\text{лок}} (\mathfrak{A}y)(t).$$

Поэтому согласно (12) и (16)

$$y(t) = (\mathfrak{A}y)(t) + h(t), \qquad t \ge 0. \tag{17}$$

Из этого равенства и включений $h(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$, $(\mathfrak{A}y)(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ вытекает, что $y(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$.

Итак, множество решений уравнения (5) непусто. Докажем единственность решения этого уравнения.

Пусть $u(t)$ — произвольное решение уравнения (5), т. е.

$$u(t) = (\mathfrak{A}u)(t) + h(t), \qquad t \ge 0,$$

и $u(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$. Отсюда и из (17) получаем

$$y(t) - u(t) = (\mathfrak{A}y)(t) - (\mathfrak{A}u)(t), \qquad t \ge 0.$$

Следовательно,

$$\|y(t)-u(t)\|_E \le \int_0^t \|y(s)-u(s)\|_E \, d\beta(s), \qquad t \ge 0,$$

согласно (11). Тогда на основании леммы 2

$$\|y(t)-u(t)\|_E \le \frac{(\beta(t)-\beta(0))^n}{n!} \sup_{0\le s\le t} \|y(s)-u(s)\|_E$$

для всех $t \ge 0$ и $n \ge 1$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\beta(t)-\beta(0))^n}{n!} = 0$$

для каждого $t \ge 0$, то $y(t) \equiv u(t)$.

Теорема доказана.

4. Некоторые следствия. Для системы (1) – (3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть*:

1) $A : \mathbb{R}^+ \setminus T \to L(E)$, $f : \mathbb{R}^+ \setminus T \to E$ — *непрерывные отображения, для которых* $\int_0^t \left(\|A(s)\|_{L(E)} + \|f(s)\|_E\right) ds < \infty$ *для каждого* $t > 0$;

2) $B: T \to L(E)$ *и* $g: T \to E$ — *отображения, для которых*

$$\sum_{s \in T \cap (0,t)} \left(\|B(s)\|_{L(E)} + \|g(s)\|_E \right) < \infty \text{ для каждого } t \in \{\tau : (0, \tau) \cap T \neq \varnothing\}.$$

Тогда задача (1) – (3) *имеет единственное решение* $x(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ *для каждого* $x_0 \in E$.

Эта теорема — следствие теоремы 1. Действительно, задача о существовании и единственности решений системы (1) – (3) равносильна аналогичной задаче для уравнения (4), а уравнение (4) — частный случай уравнения (5), где в качестве оператора $\mathfrak{A}$ следует рассматривать оператор

$$(\mathfrak{B}x)(t) = \begin{cases} \int_0^t A(s)\,x(s)\,ds + \sum_{s \in T \cap (0,t)} B(s)\,x(s-0), & \text{если } T \cap (0,t) \neq \varnothing, \\ \int_0^t A(s)\,x(s)\,ds, & \text{если } T \cap (0,t) = \varnothing \text{ или } t = 0, \end{cases} \tag{18}$$

а в качестве функции $h(t)$ — функцию

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_0 + \int_0^t f(s)\,ds + \sum_{s \in T \cap (0,t)} g(s), & \text{если } T \cap (0,t) \neq \varnothing, \\ x_0 + \int_0^t f(s)\,ds, & \text{если } T \cap (0,t) = \varnothing \text{ или } t = 0. \end{cases} \tag{19}$$

В силу условий теоремы 2 $\gamma(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$, $\mathfrak{B}y \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ для всех $y \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+, E)$ и для оператора $\mathfrak{B}$ выполняется соотношение (11), где в качестве функции $\beta(t)$ следует рассматривать функцию

$$\alpha(t) = \begin{cases} \int_0^t \|A(s)\|_{L(E)}\,ds + \sum_{s \in T \cap (0,t)} \|B(s)\|_{L(E)}, & \text{если } T \cap (0,t) \neq \varnothing, \\ \int_0^t \|A(s)\|_{L(E)}\,ds, & \text{если } T \cap (0,t) = \varnothing \text{ или } t = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Заметим, что если функция $\alpha(t)$ ограничена, то банахово пространство $V(\mathbb{R}^+, E)$ инвариантно относительно оператора $\mathfrak{B}$, этот же оператор является квазинильпотентным [13, с. 196] (на основании леммы 2) и задача (1) – (3) в случае $\gamma(t) \in V(\mathbb{R}^+, E)$ имеет единственное решение $x(t) \in V(\mathbb{R}^+, E)$ для каждого $x_0 \in E$, которое представляется в виде

$$x(t) = \gamma(t) + (\mathfrak{B}\gamma)(t) + (\mathfrak{B}^2\gamma)(t) + \ldots + (\mathfrak{B}^n\gamma)(t) + \ldots$$

(ряд сходится, поскольку спектральный радиус оператора $\mathfrak{B}$ равен 0).

Теперь рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus T, & (21) \\ \Delta x(t) = B(t, x(t-0)), \quad t \in T, & (22) \\ x(0) = x_0, & (23) \end{cases}$$

где $x_0 \in E$ и $A: (\mathbb{R}^+ \setminus T) \times E \to E$, $B: T \times E \to E$ — непрерывные отображения, удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям.

Теорема 3. *Пусть:*

1) *существуют непрерывное отображение* $a : \mathbb{R}^+ \setminus T \to \mathbb{R}^+$ *и отображение* $b : T \to \mathbb{R}^+$ *такие, что*

$$\|A(t,x) - A(t,y)\|_E \le a(t)\|x-y\|_E,$$
$$\|B(s,x) - B(s,y)\|_E \le b(s)\|x-y\|_E$$

для всех $\{x, y\} \subset E$, $\{t, s\} \subset \mathbb{R}^+$ *и*

$$\int_0^t a(s)\,ds + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} b(s) < \infty$$

для всех достаточно больших $t > 0$;

2) $\int_0^t \|A(s,0)\|_E\,ds + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} \|B(s,0)\|_E < \infty$ *для всех достаточно больших* $t > 0$.

Тогда для каждого $x_0 \in E$ *система* (21) – (23) *имеет единственное решение* $x(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$.

Сформулированная теорема — частный случай теоремы 1. Действительно, задача о существовании и единственности решений системы (18) – (20) равносильна аналогичной задаче для уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(s, x(s))\,ds + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} B(s, x(s-0)) \tag{24}$$

(в случае $T \bigcap (0, t) = \varnothing$ или $t = 0$ слагаемое $\sum_{s \in T \bigcap (0,t)} B(s, x(s-0))$ предполагается равным 0). В силу условий теоремы 3 оператор

$$(\mathfrak{A}x)(t) = \int_0^t A(s, x(s))\,ds + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} B(s, x(s-0)) \tag{25}$$

(второе слагаемое считается нулевым, если $T \bigcap (0, t) = \varnothing$ или $t = 0$) удовлетворяет условиям теоремы 1, где

$$\beta(t) = \begin{cases} \int_0^t a(s)\,ds + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} b(s), & \text{если} \quad T \bigcap (0,t) \ne \varnothing, \\ \int_0^t a(s)\,ds, & \text{если} \quad T \bigcap (0,t) = \varnothing \text{ или } t = 0. \end{cases}$$

Поэтому уравнение (24), а следовательно, система (21) – (23) имеют единственное решение $x(t) \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+, E)$ для каждого $x_0 \in E$.

5. Положительные решения уравнения (5). В дальнейшем будем предполагать, что банахово пространство E является вещественным. Рассмотрим в E конус K, т. е. множество, удовлетворяющее условиям:

а) множество K замкнуто;

б) из $u, v \in K$ вытекает, что $\alpha u + \beta v \in K$ при всех $\alpha, \beta \ge 0$;

в) из каждой пары векторов x, $-x$ по крайней мере один не принадлежит K, если $x \ne 0$, где 0 — нуль пространства E.

Банахово пространство E с конусом K является полуупорядоченным пространством [14]. Полуупорядоченность в пространстве E вводится следующим образом: записываем $x \le y$, если $y - x \in K$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$ и $\mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ множества всех функций $m = m(t)\in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^+,E)$ и $n=n(t)\in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^+,E)$, для которых $m(t)\in K$ и $n(t)\in K$ для всех $t\in \mathbb{R}^+$.

В этом пункте будем рассматривать задачу о существовании и единственности решений уравнения (5) с оператором $\mathfrak{A}$, определенным на $\mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$. Будем предполагать, что этот оператор является положительным, т.е. $\mathfrak{A}\, m\in \mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$ для всех $m\in \mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$, и монотонным, т. е. $(\mathfrak{A}m_1)(t)\le (\mathfrak{A}m_2)(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}^+$, если $m_1(t)\le m_2(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}^+$. Тогда решения рассматриваемой задачи согласно [14] следует называть положительными.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (5) *оператор* $\mathfrak{A} : \mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E) \to \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ *является монотонным и удовлетворяет соотношению* (11) *для всех* y, $z \in \mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$ *и* $t\ge 0$, *где* $\beta(t)$ — *неубывающая на* $\mathbb{R}^+$ *функция из* $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. *Тогда это уравнение для каждой функции* $h(t)\in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ *имеет единственное решение* $x(t)\in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом учитывается то, что на основании включения $h(t)\in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ и свойств положительности и монотонности оператора $\mathfrak{A}$ все члены ряда (15) являются элементами множества $\mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ и сумма $y(t)$ этого ряда в силу (14) и замкнутости конуса K также является элементом этого множества.

6. Положительные решения систем (1) – (3) и (21) – (23).

Теорема 5. *Пусть:*

1) $A:\mathbb{R}^+\setminus T \to L(E)$ *и* $f:\mathbb{R}^+\setminus T\to L(E)$ — *непрерывные отображения, для которых* $\int_0^t(\|A(s)\|_{L(E)}+\|f(s)\|_E)\,ds<+\infty$ *для каждого* $t>0$;

2) $B:T\to L(E)$ *и* $g:T\to K$ — *непрерывные отображения, для которых сумма* $\sum_{s\in T\cap(0,t)}(\|B(s)\|_{L(E)}+\|g(s)\|_E)$ *конечна для каждого* $t>0$, *если* $(0,t)\cap T\ne\varnothing$;

3) $A(t)K\subset K$ *для всех* $t\in\mathbb{R}^+\setminus T$ *и* $B(t)K\subset K$ *для всех* $t\in T$.

Тогда задача (1) – (3) *имеет единственное решение* $x(t)\in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ *для каждого* $x_0\in K$.

Эта теорема — следствие теоремы 4. Действительно, задача о существовании и единственности положительных решений системы (1) – (3) равносильна аналогичной задаче для уравнения (5), где в качестве оператора $\mathfrak{A}$ и функции $h(t)$ следует рассматривать соответственно оператор $\mathfrak{B}$ и функцию $\gamma(t)$, определенные равенствами (18) и (19). Оператор $\mathfrak{B}$ является положительным, а следовательно, монотонным в силу условия 3 теоремы 5. Для этого оператора выполняется также соотношение (11), если в качестве функции $\beta(t)$ рассматривать функцию $\alpha(t)$, определенную равенством (20).

Аналогичное утверждение справедливо и для системы (21) – (23).

Теорема 6. *Пусть*:

1) *выполняются условия* 1 *и* 2 *теоремы* 3;

2) $A(t,x)\in K$ *для всех* $(t,x)\in(\mathbb{R}^+\setminus T)\times K$ *и* $B(s,y)\in K$ *для всех* $(s, y)\in T\times K$.

Тогда для каждого $x_0\in K$ *система* (21) – (23) *имеет единственное решение* $x(t)\in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$.

Действительно, задача о существовании и единственности положительных решений системы (21) – (23) равносильна аналогичной задаче для уравнения (24), а оператор $\mathfrak{A}$, определенный равенством(25), в силу условия 2 теоремы 6 является положительным и монотонным. Поэтому на основании теоремы 4 имеет место утверждение теоремы 6.

7. Оценки положительных решений. С помощью предложенных выше идей и методов исследования можно получить оценки для положительных решений уравнений вида (5).

Наряду с уравнением (5) (с ограничениями на оператор $\mathfrak{A}$, указанными в теореме 4) рассмотрим неравенства

$$v(t) \le (\mathfrak{A}_1 v)(t) + h_1(t), \qquad t \ge 0, \tag{26}$$

$$w(t) \ge (\mathfrak{A}_2 w)(t) + h_2(t), \qquad t \ge 0, \tag{27}$$

где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — монотонные операторы, действующие из $\mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$ в $\mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ и удовлетворяющие соотношению

$$(\mathfrak{A}_1 x)(t) \le (\mathfrak{A}x)(t) \le (\mathfrak{A}_2 x)(t) \tag{28}$$

для всех $x \in \mathfrak{M}_K(\mathbb{R}^+,E)$ и $t \ge 0$, а функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ из $\mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ удовлетворяют неравенству

$$h_1(t) \le h(t) \le h_2(t) \tag{29}$$

для всех $t \ge 0$ (здесь $h(t) \in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$).

Справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 7. *Пусть:*

1) *оператор* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4;
2) *операторы* $\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathfrak{A}_2$ *удовлетворяют указанным выше требованиям*;
3) *имеет место неравенство* (29).

Тогда для решения $x(t)$ *уравнения* (5) *и произвольных решений* $v(t)$ *и* $w(t)$ *неравенств* (26) *и* (27) *выполняется соотношение*

$$v(t) \le x(t) \le w(t) \tag{30}$$

для всех $t \ge 0$.

Доказательство. Пусть $x_n(t) = (\mathfrak{A}x_{n-1})(t) + h(t)$, $n \ge 1$, и $x_0(t) = h(t)$. С помощью неравенств (28), (29) и монотонности операторов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ легко убедиться в том, что

$$v(t) \le x_n(t) \le w(t)$$

для всех $t \ge 0$ и $n \ge 0$. А поскольку $x_n(t) \xrightarrow{\text{лок}} x(t)$ при $n \to +\infty$ (см. доказательство теоремы 1), то в силу замкнутости конуса K выполняется соотношение (30).

Теорема 7 доказана.

Заметим, что теорема 7 аналогична соответствующим результатам С. А. Чаплыгина [15].

В качестве следствий этой теоремы приведем два утверждения об оценках положительных решений интегро-суммарных неравенств (термин „интегро-суммарное неравенство" введен в рассмотрение в [16]).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, $x_0 \in K$ *и* $x(t)$ — *решение уравнения* (4). *Тогда каждое решение* $y(t) \in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+,E)$ *интегро-суммарного неравенства*

$$y(t) \le x_0 + \int_0^t \big(A(s)y(s) + f(s)\big)ds \; + \\ + \sum_{s \in T \bigcap (0,t)} \big(B(s)y(s-0) + g(s)\big), \qquad t \ge 0,$$

удовлетворяет условию

$$0 \le y(t) \le x(t), \quad t \ge 0.$$

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, $x_0 \in K$ *и* $x(t)$ — *решение уравнения* (24). *Тогда для каждого решения* $y(t) \in \mathfrak{N}_K(\mathbb{R}^+, E)$ *интегро-суммарного неравенства*

$$z(t) \le x_0 + \int_0^t A(s, z(s))\,ds + \sum_{s \in T \cap (0,t)} B(s, z(s-0)), \quad t \ge 0,$$

имеет место оценка

$$0 \le z(t) \le x(t), \quad t \ge 0.$$

В заключение статьи заметим, что общие теоремы о существовании и единственности решений функционального уравнения (5) применимы не только к рассмотренным выше дифференциальным уравнениям с импульсными возмущениями, но и к общим интегральным уравнениям, содержащим не только абсолютно непрерывные и дискретные компоненты, но и сингулярные компоненты [9]. Изложенное справедливо и по отношению к теореме 7, поскольку теоремы 8 и 9 справедливы и для более общих неравенств, чем интегро-суммарные, а именно: для неравенств, содержащих и сингулярные слагаемые.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Das P. C., Sharma R. R.* Existence and stability of mesure differential equations // Czech. Math. J. – 1972. – **22**, № 97. – P. 145 – 158.
4. *Schwabik S.* Generalized differential equations. Fundamental results // Rozpr. ČSAV MPV. – Praha, 1985. – 104 p.
5. *Schwabik S.* Generalized differential equations. Special results // Ibid. – Praha, 1989. – 80 p.
6. *Трофимчук С. И.* Исследование почти периодических импульсных систем: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 201 с.
7. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 269 с.
8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс. – М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
10. *Слюсарчук В. Е.* Одно свойство абсолютно сходящихся числовых рядов // Математика сегодня '97. Науч.-метод. сб. / Под ред. А. Я. Дороговцева. – Киев: ТВіМС, 1997. – С. 28 – 42.
11. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – **215**(49). – С. 32 – 35.
12. *Слюсарчук В. Е.* P-непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1997. – Вип. 15. – С. 188 – 226.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
14. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
15. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Тр. Центр. аэродинам. ин-та. – 1932. – Вып. 130. – С. 5 – 17.
16. *Самойленко А. М., Борисенко С. Д.* Интегро-суммарные неравенства и устойчивость процессов с дискретным возмущением // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. третьей междунар. конф. – Руссе (Болгария), 1987. – Ч.1. – С. 377 – 380.

Получено 14.07.98