УДК 517.948.5

**Б. И. Пелешенко** (Днепропетр. аграр. ун-т)

# ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Integral convolution operators

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy,$$

are considered which are given on spaces of functions of several real variables. For kernels $k(x)$ satisfying the Hörmander condition, necessary and sufficient conditions of the uniform boundedness of operators $\{T_\varepsilon\}$ from the Lorentz spaces into the Marcinkiewicz spaces are obtained.

Розглядаються інтегральні оператори згортки

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy,$$

задані на просторах функцій декількох дійсних змінних. Для ядер $k(x)$, які задовольняють умову Хермандера, одержано необхідні та достатні умови рівномірної обмеженості операторів $\{T_\varepsilon\}$ з просторів Лоренца в простори Марцінкевича.

В работе [1] (см. также [2]) описаны свойства ядра $k(x)$ операторов свертки

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

в случае, когда ядро $k(x)$ локально интегрируемо в $R^n - \{0\}$ и при некотором $a \geq 1$ выполняется условие Хермандера

$$\int\limits_{2|x|<|y|} |k(x-y) - k(y)|^a\, dy \leq B, \qquad |x| \neq 0, \tag{2}$$

а операторы $\{T_\varepsilon\}$ являются операторами слабого типа $(p, q)$ равномерно по $\varepsilon$ для некоторой пары чисел $p, q$, удовлетворяющих условиям $1 \leq p \leq q < \infty$, $p^{-1} - q^{-1} = 1 - a^{-1}$.

В частности, доказано, что в этом случае при $1 < a < \infty$ ядро $k(x) \in L_a^*(R^n)$. В. Д. Степанов [2] привел пример функции, которая принадлежит $L_a^*(R^n)$, $1 < a < \infty$, но не удовлетворяет условию (2). В настоящей статье исследованы свойства ядра $k(x)$ при условии, что $k(x)$ „почти принадлежит" некоторому максимальному симметричному пространству $E(R^n)$ [3, с. 141] и операторы (1) равномерно ограничены из пространства Лоренца $\Lambda_\varphi(R^n)$ в пространство Марцинкевича $M_\psi(R^n)$. Если в качестве $E(R^n)$ рассматривать, например, некоторое пространство Марцинкевича, то доказано, что в этом случае условия, накладываемые нами на ядро $k(x)$ и операторы $\{T_\varepsilon\}$, эквивалентны условию принадлежности $k(x)$ этому пространству.

Пусть $\Phi$ — множество вогнутых возрастающих на полуоси $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = 0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$. Для положительной всюду конечной на полуоси $(0, \infty)$ функции $\psi(t)$ и $s > 0$ полагаем $M_\psi(s) = \sup\limits_{0<t<\infty} \dfrac{\psi(st)}{\psi(t)}$. Через $g^*(t)$ обозначим невозрастающую перестановку модуля измеримой на $R^n$ функции $g(x)$, $g^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g^*(\tau)\, d\tau$, через $\chi_\rho$ — характеристическую функцию шара $B_\rho = \{x \in R^n : |x| < \rho\}$. Пусть $E(R^n)$ и $E'(R^n)$ — соответственно симметричное и двойственное к нему пространства функций, заданных на $R^n$, $\varphi_E(t)$ и $\varphi_{E'}(t) = t/\varphi_E(t)$ — их фундаментальные функции [3, с. 137]. Для максимального симметричного пространства $E(R^n)$ т. е. когда $E(R^n)$ изоморфно $E''(R^n)$, норма $\| f \|_E$ функции $f(x)$ из $E(R^n)$ эквивалентна норме

$$\| f \|_E^* = \sup_{\| g \|_{E'} \le 1} \int_{R^n} f(x) g(x)\, dx. \tag{3}$$

При этом в определении нормы (3) можно рассматривать только измеримые существенно ограниченные и финитные в $R^n$ функции $g(x)$ (множество всех таких функций обозначается $L_\infty^0(R^n)$). К максимальным симметричным пространствам относятся пространства Лебега $L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, Марцинкевича $M_\psi(R^n)$ и Лоренца $\Lambda_\varphi(R^n)$ с фундаментальными функциями соответственно $t^{1/p}$, $t/\overline{\psi}(t) = \psi(t)$ и $\varphi(t)$ [3]. Если $\varphi(t) = t^{1/p}$ и $\psi(t) = t^{1-1/q}$, где $1 \le p$, $q < \infty$, то $\Lambda_\varphi(R^n)$ и $M_\psi(R^n)$ обозначаются соответственно $L_{p1}(R^n)$ и $L_q^*(R^n)$.

**Определение.** *Пусть функция $\varphi(t) \in \Phi$. Операторы $\{T_\varepsilon\}$ назовем равномерно ограниченными из $\Lambda_\varphi(R^n)$ в $M_\psi(R^n)$, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\| T_\varepsilon f \|_{M_\psi} \le C \| f \|_{\Lambda_\varphi}$ для всех функций $f(y) \in L_\infty^0(R^n)$ и всех $\varepsilon > 0$.*

**Теорема 1.** *Пусть фундаментальные функции максимальных симметричных пространств $E(R^n)$, $\Lambda_\varphi(R^n)$, $M_\psi(R^n)$ принадлежат $\Phi$ и таковы, что*

$$\int_0^1 M_{\overline{\varphi}_E}(z^{-1})\, dM_\varphi(z) + \int_0^1 z^{-1} M_{\varphi_E}(z^{-1})\, dz < \infty, \qquad \psi(t) = \frac{t^2}{\varphi(t)\varphi_E(t)};$$

*функция $k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n - \{0\})$ и удовлетворяет при некотором $B > 0$ условию*

$$\left\| (k(x - \cdot) - k(\cdot))(1 - \chi_{2\rho}(\cdot)) \right\|_E \le B \quad \text{для любого} \quad \rho > 0 \quad \text{и всех} \quad |x| \le \rho. \tag{4}$$

*Если операторы $\{T_\varepsilon\}$ равномерно ограничены из $\Lambda_\varphi(R^n)$ в $M_\psi(R^n)$, то*

$$\sup_{0<\rho<\infty} \left\| k(\chi_{2\rho} - \chi_\rho) \right\|_E \le \infty. \tag{5}$$

***Доказательство.*** Пусть $\rho > 0$ и множество $\Omega_\rho = \{y \in R^n : \rho \le |y| \le 2\rho\}$ является носителем функции $f(y) \in L_\infty^0(R^n)$ с $\| f \|_{E'} \le 1$. Поскольку $k \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n - \{0\})$, то $\int_{\Omega_\rho} k(y) f(y)\, dy$ существует. Пусть $\left| \int_{\Omega_\rho} k(y) f(y)\, dy \right| = \lambda > B$, где $B$ — константа из условия (4). Тогда для $\varepsilon = \rho/2$ и $|x| \le \rho/2$ имеем

$$|k_\varepsilon * f(x)| = \left| \int_{\Omega_\rho} k(y + x) f(-y)\, dy \right| \ge$$

$$\ge \left| \int_{\Omega_\rho} k(y) f(-y)\, dy \right| - \left| \int_{\Omega_\rho} k(y + x) f(-y) - k(y) f(y)\, dy \right| \ge \lambda - B > 0, \tag{6}$$

т. е. $(k_\varepsilon * f)^*(t) \ge \lambda - B > 0$ для всех $t \in (0, \gamma 2^{-n} \rho^n)$, где $\gamma$ — объем единичного шара. При доказательстве этого неравенства мы воспользовались тем, что условие $|x-y|>\rho/2$ выполняется, если $y\in\Omega_\rho$ и $|x|\le\rho/2$. Далее, используя условие ограниченности оператора свертки из пространства $\Lambda_\varphi(R^n)$ в $M_\psi(R^n)$, имеем

$$\frac{a(k_\varepsilon * f)^{**}(a)}{\psi(a)} \le C\int_0^a f^*(t)\,d\varphi(t) \le C\|f\|M_{\varphi_E}\int_0^a t^{-1}\varphi_E(t)\,d\varphi(t) \le$$

$$\le C\|f\|M_{\varphi_E}a^{-1}\varphi_E(a)\varphi(a)\int_0^1 M_{\varphi_E}(z)z^{-1}\,d\left(\frac{\varphi(az)}{\varphi(a)}\right),$$

где $a=2^n\gamma\rho^n$. Так как согласно условию теоремы функция $M_{\varphi_E}(z)/z$ не возрастает, то на основании свойства интегралов от невозрастающих положительных функций [3, с. 100] получаем

$$\int_0^1 M_{\varphi_E}(z)z^{-1}\,d\left(\frac{\varphi(az)}{\varphi(a)}\right) \le \int_0^1 M_{\varphi_E}(z)z^{-1}\,d\big(M_\varphi(z)\big) = \int_0^1 M_{\overline{\varphi}_E}(z)z^{-1}\,dM_\varphi(z) < \infty$$

и

$$\frac{a(k_\varepsilon * f)^{**}(a)}{\psi(a)} \le C_1 a^{-1}\varphi_E(a)\varphi(a). \tag{7}$$

С учетом соотношения $a/\psi(a) = a^{-1}\varphi_E(a)\varphi(a)$ из неравенств (6), (7) имеем

$$0<\lambda-B \le (k_\varepsilon * f)\left(2^{-n}\gamma\rho^n\right) \le C_1.$$

При этом постоянные $B$ и $C_1$ не зависят от функции $f(x)$ и числа $\rho$. Поскольку пространство $E(R^n)$ максимальное, то из двойственности $E(R^n)$ пространству $E'(R^n)$ получаем

$$\forall\,\rho>0 \quad \left\|k\left(\chi_{2\rho}-\chi_\rho\right)\right\|_E = \sup_{\|f\|_{E'}\le 1}\int_{\Omega_\rho} k(y)f(-y)\,dy \le B+C_1 = C_2.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, функция растяжения* $M_{\varphi_E}(t)$ *удовлетворяет условию* $\int_0^1 M_{\varphi_E}\left(z^{-1}\right)dz<\infty$. *Тогда* $k(x)$ *принадлежит* $M_{\overline{\varphi}_E}\left(R^n\right)$.

***Доказательство.*** В силу условий теоремы 1 справедливо неравенство (5). Применяя обобщенное неравенство Гельдера для симметричных пространств [3, с. 140], получаем

$$\forall\,\rho>0 \quad \int_{\Omega_\rho}|k(y)|\,dy \le \left\|k\left(\chi_{2\rho}-\chi_\rho\right)\right\|_E\left\|\left(\chi_{2\rho}-\chi_\rho\right)\right\|_{E'} \le \frac{C_2 2^n\gamma\rho^n}{\varphi_E\left(2^n\gamma\rho^n\right)} \tag{8}$$

и

$$\forall\,\rho>0 \quad \int_{\|y\|\le\rho}|k(y)|\,dy \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_{2^{-k}\rho}}|k(y)|\,dy \le C_2\frac{\sum_{k=1}^{\infty}2^{(-k+1)}\gamma\rho^n}{\varphi_E\left(2^{-kn}\gamma\rho^n\right)} \le$$

$$\le \frac{3}{2}C_2\int_0^{\gamma\rho^n}\left[\varphi_E(t)\right]^{-1}dt \le \frac{3}{2}C_2\gamma\rho^n\int_0^1\left[\varphi_E\left(\gamma\rho^n z\right)\right]^{-1}dz.$$

Тогда

$$\int\limits_{\|y\|\le\rho}|k(y)|dy \le \frac{3}{2}C_2\gamma\rho^n\left[\varphi_E\left(\gamma\rho^n\right)\right]\int\limits_0^1 M_{\varphi_E}\left(z^{-1}\right)dz \le \frac{C_3\gamma\rho^n}{\varphi_E\left(\gamma\rho^n\right)}. \tag{9}$$

Пусть функция $f(x)\in L_\infty^0\left(R^n\right)$ и имеет носитель — множество с лебеговой мерой, равной $\gamma\rho^n$, и $\|f\|_{L_\infty}\le 1$. Тогда из неравенств (8), (9) и условия Хермандера для всех $|x|\le\rho/2$ имеем

$$\left|\int\limits_{R^n}(k(x+y)-k(y))f(-y)\,dy\right| \le \int\limits_{|y|\le\rho}|k(x+y)|dy + \int\limits_{|y|\le\rho}|k(y)|dy +$$

$$+\int\limits_{|y|>\rho}(k(x+y)-k(y))f(-y)\,dy \le \frac{3^n2^{1-n}C_3\gamma\rho^n}{\varphi\left(3^n2^{-n}\gamma\rho^n\right)}+\frac{B\gamma\rho^n}{\varphi_E\left(\gamma\rho^n\right)}.$$

Поскольку согласно условию функция $\varphi(t)$ возрастающая, то первое слагаемое не превышает $3^n2^{1-n}C_3\gamma\rho^n/\varphi_E\left(\gamma\rho^n\right)$ и

$$\left|\int\limits_{R^n}(k(x+y)-k(y))f(-y)\,dy\right| \le C_4\frac{\gamma\rho^n}{\varphi_E\left(\gamma\rho^n\right)} = C_4\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right).$$

Если

$$\left|\int\limits_{R^n}k(y)f(-y)\,dy\right| = \lambda \le C_4\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right),$$

то в силу (3) теорема доказана. Пусть $\lambda > C_4\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right)$, тогда для $|x|\le\rho/2$ получаем оценку

$$\lambda - C_4\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right) \le \left|\int\limits_{R^n}k(y)f(-y)\,dy\right| - \left|\int\limits_{R^n}(k(x+y)-k(y))f(-y)\,dy\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{R^n}k(x-y)f(-y)\,dy\right|.$$

Но тогда для всех $t\in(0,2^{-n}\gamma\rho^n]$ имеет место неравенство

$$\lambda \le (k*f)^*(t) + C_4\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right). \tag{10}$$

С другой стороны, из условия ограниченности оператора свертки следует

$$(k*f)^*(t) \le C\frac{\|f\|_{\Lambda_\varphi}\psi(t)}{t} \quad \forall\, t>0. \tag{11}$$

Из неравенств (10), (11) и соотношения $\psi(t) = t^2(\varphi(t)\varphi_E(t))^{-1}$ из условия теоремы при $t=2^n\gamma\rho^n$ следует оценка

$$\lambda \le C\varphi\left(2^{-n}\gamma\rho^n\right)\psi\left(2^{-n}\gamma\rho^n\right)2^n\gamma^{-1}\rho^{-n} + C\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right) \le$$

$$\le C\overline{\varphi}_E\left(2^{-n}\gamma\rho^n\right) + C_5\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right) \le (C+C_5)\,\overline{\varphi}_E\left(\gamma\rho^n\right).$$

Тогда норма $\|k\|_{M_{\overline{\varphi}_E}}$ с учетом (3) не превышает $C_6 = C_5 + C$. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $1 < a < \infty$, $1 < p < q < \infty$, $p^{-1} - q^{-1} = 1 - a^{-1}$; *функция* $k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}\left(R^n - \{0\}\right)$ *и для любого* $\rho > 0$ *и всех* $x \in B_\rho$ *выполняется условие*

$$\left\| (k(x-\cdot) - k(\cdot))\left(1 - \chi_{2\rho}(\cdot)\right) \right\|_{L_a^*} \le B. \tag{12}$$

*Если операторы свертки* $\{T_\varepsilon\}$ *равномерно ограничены из* $L_{p_1}(R^n)$ в $L_q^*(R^n)$, *то* $k(x) \in L_a^*(R^n)$.

***Замечание* 1.** Поскольку $L_{p_1}(R^n) \in L_p(R^n)$ и $L_a(R^n) \in L_a^*(R^n)$, то из следствия 1 вытекает упомянутый выше результат Юрката и Симпсона [1] (замечание 3). Приведенный в работе [2] пример показывает, что функция может принадлежать пространству $L_a^*(R^n)$ но не удовлетворять условию (2). В то же время для любой функции $k(x)$ из пространства $L_a^*(R^n)$ условие (12) выполняется. Известно [4, с. 163], что из условия $k(x) \in L_a^*(R^n)$ следует равномерная ограниченность операторов свертки (1) из $L_p(R^n)$ в $L_q^*(R^n)$ (а следовательно, из $L_{p_1}(R^n)$ в $L_q^*(R^n)$) для всех пар чисел $(p, q)$, удовлетворяющих условиям $1 \le p < q < \infty$, $p^{-1} - q^{-1} = 1 - a^{-1}$. Кроме того, любая функция из $L_a^*(R^n)$ локально интегрируема. Таким образом, условие $k(x) \in L_a^*(R^n)$ является достаточным для выполнения условий следствия 1. Более того, из теоремы Крейна–Семенова [3, с. 201] и неравенства треугольника для нормы в пространстве $M_{\overline{\varphi}_E}(R^n)$ получаем, что условие $k(x) \in M_{\overline{\varphi}_E}(R^n)$ в теореме 2 является также достаточным.

**Теорема 3.** *Пусть фундаментальная функция пространства* $\Lambda_\varphi(R^n)$ *принадлежит* $\Phi$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 M_\varphi\left(z^{-1}\right) dz + \int_0^1 z^{-1} M_\varphi\left(z^{-1}\right) dz < \infty;$$

*функция* $k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}\left(R^n - \{0\}\right)$ *и такова, что*

$$\int_{|y|>2|x|} |k(x+y) - k(y)|\, dy \le B, \qquad |x| \ne 0. \tag{13}$$

*Если операторы* $\{T_\varepsilon\}$ *равномерно ограничены из* $\Lambda_\varphi(R^n)$ в $M_\varphi(R^n)$, *то*

$$\sup_{\rho_1, \rho_2 > 0} \left| \int_{\rho_1 \le |y| \le \rho_2} k(y)\, dy \right| < \infty. \tag{14}$$

***Доказательство.*** Применяя теорему 1 в случае, когда $E(R^n) = L_1(R^n)$, получаем, что для любого $\rho > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega_\rho} |k(y)|\, dy < C_2. \tag{15}$$

Пусть $f(y) \in L_0^\infty(R^n)$ с $\| f \|_{L_\infty} \le 1$, $f(y) = 1$ при $|y| \le 2\rho$ и $f(y) = 0$ при $|y| \ge$ $\ge 3\rho$ для некоторого числа $\rho > 0$. Выберем положительное число $\varepsilon < \rho$ и пусть $2\lambda = \left| \int_{|y| \le \rho} k_\varepsilon(y)\, dy \right|$. Кроме того, из (15) получаем $\int_{\rho \le |y| \le 4\rho} |k(y)|\, dy \le$ $\le 2C_2$. Предположим, что $\lambda > 2C_2$ (в противном случае теорема доказана), тогда для $|x| \le \rho$ имеем

$$(k_\varepsilon * f)(x) = \int\limits_{|y|\le\rho} k_\varepsilon(y)\,dy + \int\limits_{\rho\le|y|\le 4\rho} |k(y)| f(x-y)\,dy$$

и $|(k_\varepsilon * f)(x)| \ge 2\lambda - 2C_2$. Отсюда следует, что для любого $t \in (0, \gamma\rho^n]$ выполняется неравенство

$$(k_\varepsilon * f)^*(t) \ge \lambda. \tag{16}$$

С другой стороны, из условия ограниченности оператора свертки при $t > 0$ имеем неравенство

$$(k_\varepsilon * f)^{**}(t)\varphi(t) \le C\| f\|_{\Lambda_\varphi}. \tag{17}$$

Из неравенств (16), (17) и вогнутости функции $\varphi(t)$ при $t = \gamma\rho^n$ следует

$$\left|\int\limits_{\varepsilon\le|y|\le\rho} k(y)\,dy\right| = 2\lambda \le \frac{2C\| f\|_{\Lambda_\varphi}}{\varphi(\gamma\rho^n)} \le \frac{2C\varphi(3^n\gamma\rho^n)}{\varphi(\gamma\rho^n)} < 2\cdot 3^n C.$$

В силу произвольности выбора числа $\rho > 0$ отсюда получаем утверждение теоремы.

***Замечание* 2.** Отметим, что в случае, когда операторы $\{T_\varepsilon\}$ являются операторами слабого типа $(p, p)$ равномерно по $\varepsilon$ при некотором фиксированном $p \in [1, \infty)$, теорема 3 вытекает из теорем 1, 2 работы [1]. Там же доказано [1] (теорема 3 и замечание 2), что операторы $\{T_\varepsilon\}$ являются операторами слабого типа $(p, p)$ для любого $p \in [1, \infty)$ если $k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n - \{0\})$ и выполнены условия (13) – (15). Из интерполяционной теоремы Крейна – Семенова [3, с. 196] следует, что при этих условиях операторы $\{T_\varepsilon\}$ равномерно ограничены из $\Lambda_\varphi(R^n)$ в $M_{\overline{\varphi}}(R^n)$ для всех функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

Таким образом справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть* $k \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n - \{0\})$ *и выполнены условия* (13) – (15). *Тогда операторы* $\{T_\varepsilon\}$ *равномерно ограничены из* $\Lambda_\varphi(R^n)$ *в* $M_{\overline{\varphi}}(R^n)$ *для всех пар пространств* $(\Lambda_\varphi(R^n), M_{\overline{\varphi}}(R^n))$, *фундаментальная функция которых удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 M_\varphi(z^{-1})\,dz + \int_0^1 z^{-1} M_\varphi(z^{-1})\,dz < \infty.$$

Из теоремы 3 данной статьи, теоремы 3 и замечания 2 статьи [1] получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *При выполнении условий теоремы* 3 *операторы* $\{T_\varepsilon\}$ *являются операторами слабого типа* $(p, p)$ *равномерно для любого* $p \in [1, \infty)$.


1. *Jurkat W. B., Sampsone G.* The $L_p$ mapping problem for well-behaved convolutions // Stud. math. – 1979. – **65**, № 3. – P. 227–228.
2. *Степанов В. Д.* Об интегральных операторах свертки // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 1. – С. 45–48.
3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.


Получено 12.10.98