УДК 517.9

Э. Кенне (Ун-т Чанге, Камерун)

ВОЗМУЩЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ

We investigate a problem of the influence of integral term in a boundary condition upon the correctness of nonlocal boundary-value problem for partial differential equations.

Досліджується питання про вплив інтегрального члена в крайовій умові на коректність нелокальної крайової задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В предлагаемой статье, являющейся развитием работ [1, 2], исследуется вопрос о возмущении двухточечной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

В области $\Pi = IR \times [0, Y]$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,y), \tag{1}$$

$$Au(x,0) + Bu(x,Y) + C\int_0^Y u(x,t)\,dt = u_0(x), \tag{2_c}$$

$A, B, C \in \mathbb{C}$. В уравнении (1) $P(s)$ — произвольный полином с постоянными (комплексными) коэффициентами. При этом будем считать задачу (1), (2_c) нелокальной, т. е. отличной от задачи Коши. Внимание к таким задачам в последнее время обусловлено, с одной стороны, тем, что подобные задачи возникают при исследовании прикладных вопросов, а с другой — тем, что для многих уравнений в частных производных в ряде областей корректные задачи возможны лишь при нелокальных граничных условиях [3–6].

Будем считать Y фиксированным и исследуем вопрос о корректности задачи (1), (2_c) при малых значениях $|C|$. При $c = 0$ обозначим условие (2_c) как условие (2_0). В этом случае условие (2_0) имеет вид

$$Au(x,0) + Bu(x,Y) = u_0(x)$$

— двухточечная задача. Обозначим также

$$H_m = \left\{\varphi \in C^m(IR) \colon \|\varphi\|_m = \max_{0\le j\le m}\sup_{IR}|\varphi^{(j)}(x)| < +\infty\right\}, \quad H = \bigcup_{m\ge 0} H_m .$$

Определение. *Задача* (1), (2_c) *называется корректной* (*в* H), *если для любого* $m \ge 0$ *существует* $l \ge 0$ *такое, что для любой* $u_0(x) \in H_1$ *существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* (1), (2_c), *которое при любом* $y \in [0, Y]$ *принадлежит пространству* H_m, *причем* $\sup_{[0,T]}\|u\|_m \le C_0\|u_0\|_l$.

Задача (1), (2_c) при условии $|AB| + |C| > 0$ корректна (в H) тогда и только тогда, когда [1] $\Delta(\sigma; C) \ne 0$ $\forall \sigma \in IR$, где

$$\begin{cases} A + B\exp(YP(i\sigma)) + \dfrac{\exp(YP(i\sigma)) - 1}{P(i\sigma)}, & P(i\sigma) \ne 0; \\ A + B + CY, & P(i\sigma) = 0. \end{cases}$$

Задача Коши ($AB = C = 0$) для уравнения (1) корректна тогда и только тогда, когда [7] выполнено условие (А) Петровского:

$$|A|\sup_{IR}\operatorname{Re}P(i\sigma) - |B|\inf_{IR}\operatorname{Re}P(i\sigma) < +\infty. \tag{A}$$

Из результатов работы [2] следует, что задача (1), (2_0) корректна тогда и только тогда, когда $\Delta(\sigma; 0) \neq 0 \quad \forall \sigma \in IR$.

В пунктах 1 и 2 будем исследовать два вопроса.

1. Пусть задача (1), (2_0) некорректна. Верно ли, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C \in \mathbb{C}$, $0 < |C| < \varepsilon$, такое, что задача (1), (2_c) корректна (в H)?

2. Пусть задача (1), (2_0) корректна. Верно ли, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $C \in \mathbb{C}$, $0 < |C| < \varepsilon$, задача (1), (2_c) корректна (в H)?

Оказалось, что ответ на вопрос 1 положителен тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

1) $A + B \neq 0$;

2) $A + B = 0$, $\{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; 0) = 0\} = \{\sigma \in IR : P(i\sigma) = 0\}$.

Ответ на вопрос 2 всегда положителен.

1. Возмущение некорректной краевой задачи интегральным членом в краевом условии. Предполагаем, что задача (1), (2_0) некорректна, что равносильно условиям:

a) если $A + B \neq 0$, то $\{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; 0) = 0\} = \varnothing$;

b) если $A = 0$ $(B \neq 0)$, то $\inf_{IR}\operatorname{Re}P(i\sigma) = -\infty$, а если $B = 0$ $(A \neq 0)$, то $\sup_{IR}\operatorname{Re}P(i\sigma) = +\infty$.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2_0) *некорректна. Для того чтобы при любом* $\varepsilon > 0$ *существовало* $C \in \mathbb{C}$, $0 < |C| < \varepsilon$, *такое, чтобы „возмущенная" задача* (1), (2_c) *была корректной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий* 1, 2.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть условия 1 и 2 нарушены, т. е. $A + B = 0$ и $\{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; 0) = 0\} \setminus \{\sigma \in IR : P(i\sigma) = 0\} \neq \varnothing$. Пусть $P(i\sigma_0) \neq 0$ и $\Delta(\sigma_0; 0) = A + B\exp(YP(i\sigma_0)) = 0$. Следовательно, $\exp(YP(i\sigma_0)) = 1$ и $\Delta(\sigma_0; C) = 0 \quad \forall C \in \mathbb{C}$. Это показывает, что задача (1), (2_c) некорректна (при любом значении $C \in \mathbb{C}$).

Достаточность. Следует доказать возможность такого выбора $C \in \mathbb{C}$, $0 < |C| < \varepsilon$, что $\{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; C) = 0\} = \varnothing$.

Обозначим

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \dfrac{\exp(YP(i\sigma)) - 1}{P(i\sigma)}, & P(i\sigma) \neq 0; \\ Y, & P(i\sigma) = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta(\sigma; C) = C\varphi(\sigma) + A + B\exp(YP(i\sigma)). \tag{3}$$

Случай $\boldsymbol{A + B \neq 0}$. При $\sigma \in N[\varphi] = \{\sigma \in IR : \varphi(\sigma) = 0\}$ имеем $\Delta(\sigma; C) = A + B \neq 0$ при любом значении $C \in \mathbb{C}$, а при $\sigma \notin N[\varphi]$ получаем

$$\Delta(\sigma; C) = \varphi(\sigma)\left[C + \frac{A + B\exp(YP(i\sigma))}{\varphi(\sigma)}\right] \neq 0,$$

если

$$C \in \left\{ -\frac{A + B\exp(YP(i\sigma))}{\varphi(\sigma)},\ \sigma \in IR \right\},$$

так что при любом $\varepsilon > 0$ возможен такой выбор $C \in \mathbb{C}$, причем $0 < |C| < \varepsilon$.

Случай $\boldsymbol{A + B = 0}$**.** Из условия 2 следует, что $\exp(YP(i\sigma)) = 1$ лишь при $P(i\sigma) = 0$. Задача сводится к отысканию такого $C \in \mathbb{C}$, что $0 < |C| < \varepsilon$ и $BP(i\sigma) + C \neq 0$ для любого $\sigma \in IR$, что, очевидно, всегда возможно ($C \notin$ $\notin \{-BP(i\sigma), \sigma \in IR\}$). Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему на классических примерах.

***Пример* 1.** Задача Коши для обратного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

некорректна. Задача с условием

$$u(x,0) + C\int_0^Y u(x,t)\,dt = u_0(x)$$

при $C \neq 0$ для обратного уравнения теплопроводности корректна, если C такое, что

$$1 + C\frac{\exp(Y\sigma^2) - 1}{\sigma^2} \neq 0 \quad \text{или} \quad C \notin \left[-Y^{-1}, 0\right).$$

***Пример* 2.** Для уравнения

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

задача $u(x,0) - u(x,Y) = u_0(x)$ некорректна и остается некорректной при любом $C \in \mathbb{C}$, если краевое условие заменяется условием

$$u(x,0) - u(x,T) + C\int_0^T u(x,t)\,dt = u_0(x),$$

так как вместе с функцией $u_C(x,y)$, являющейся решением этой задачи при каком-либо значении $C \in \mathbb{C}$, ее решением также является функция $u_C(x,y) +$ $+ \cos\frac{2\pi}{Y}(x+y)$ при том же значении C. В данном случае нарушены условия 2, так как

$$A + B = 0, \qquad \{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; 0) = 0\} = \{2k\pi, k \in Z\},$$
$$\{\sigma \in IR : P(i\sigma) = 0\} = \{0\}.$$

2. Возмущение корректной краевой задачи интегральным членом в краевом условии.

Теорема 2. *Пусть задача* (1), (2_0) *корректна. Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого значения* $C \in \mathbb{C} : 0 < |C| < \varepsilon$ *задача* (1), (2_C) *также корректна.*

Достаточность. Пусть сначала $A+B=0$. Из условия $|A|+|B|>0$ заключаем, что $AB \neq 0$, т. е. задача (1), (2_0) является нелокальной. Согласно [2]. условие корректности такой задачи состоит в том, что $\{\sigma \in IR : \Delta(\sigma; 0) = 0\} = \varnothing$. Отсюда следует, что $P(i\sigma) \neq 0$ при любом $\sigma \in IR$, а значит, $\inf\limits_{IR}|\operatorname{Re} P(i\sigma)| = m > 0$. Тогда имеем $\Delta(\sigma; C) = (C + BP(i\sigma))\varphi(\sigma)$, причем $\varphi(\sigma) \neq 0$ $\forall \sigma \in IR$. Выбрав $C \in \mathbb{C}$ из условия $|C| < |B|m$, получим требуемое.

Пусть теперь $A+B \neq 0$. Рассмотрим три случая.

***Случай* а).** Пусть

$$\mu_1 = \sup_{IR}|\varphi(\sigma)|; \quad \lambda_1 = \inf_{IR}|A + B\exp(YP(i\sigma))|.$$

Поскольку из корректности задачи (1), (2_0) следует, что $A + B\exp(YP(i\sigma)) \neq 0$, $\sigma \in IR$, и, кроме того, если $\operatorname{Re} P(i\sigma) \to -\infty$ при $|\sigma| \to +\infty$, то $A \neq 0$, так как в противном случае нарушилось бы условие (А) И. Г. Петровского, то $\lambda_1 > 0$. Поэтому

$$|\Delta(\sigma; C)| \geq |A + B\exp(YP(i\sigma))| - |C||\varphi(\sigma)| \geq \lambda_1 - |C|\mu_1 > 0 \text{ при } |C| < \frac{\lambda_1}{\mu_1}.$$

***Случай* б).** Пусть

$$\mu_1 = \sup_{IR}|\varphi(\sigma)|\exp(-Y\operatorname{Re} P(i\sigma)) < +\infty,$$

$$\lambda_1 = \inf_{IR}|B + A\exp(-Y\operatorname{Re} P(i\sigma))| > 0$$

(последнее неравенство устанавливается аналогично случаю а). Тогда

$$\Delta(\sigma; C) = \exp(Y\operatorname{Re} P(i\sigma))\left|B + C\varphi(\sigma)\exp(-YP(i\sigma)) + A\exp(-YP(i\sigma))\right| \geq$$

$$\geq \exp(Y\operatorname{Re} P(i\sigma))(\lambda_1 - |C|\mu_1) > 0, \quad \text{если} \quad |C| < \lambda_1\mu_1^{-1}.$$

***Случай* в).** Считая $\operatorname{sign}(\operatorname{Re} P(i\sigma)) = \operatorname{sign}(\sigma)$ при $|\sigma| \to +\infty$, полагаем

$$\mu_1' = \sup_{\sigma \geq 0}|\varphi(\sigma)|\exp(-Y\operatorname{Re} P(i\sigma)),$$

$$\mu_1'' = \sup_{\sigma \leq 0}|\varphi(\sigma)|,$$

$$\lambda_1' = \inf_{\sigma \geq 0}\left|B + A\exp(-YP(i\sigma))\right|,$$

$$\lambda_1'' = \inf_{\sigma \leq 0}\left|A + B\exp(YP(i\sigma))\right|.$$

Тогда

$$|\Delta(\sigma; C)| \geq \lambda_1' - |C|\mu_1'' \quad \text{при} \quad \sigma \leq 0,$$

$$|\Delta(\sigma; C)| \geq \exp(Y\operatorname{Re} P(i\sigma))(\lambda_1' - |C|\mu_1') \quad \text{при} \quad \sigma \geq 0.$$

Имеем $\Delta(\sigma; C) \neq 0$ при $|C| < \min(\lambda_1'/\mu_1', \lambda_1''/\mu_1'')$. Теорема доказана.

***Пример* 3.** Задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

является корректной задачей. Согласно теореме 2 она остается корректной при возмущении условия Коши интегральным слагаемым с достаточно малым коэффициентом

$$u(x,0) + C\int_0^Y u(x,t)\,dt = u_0(x). \tag{4}$$

Если выбрать $C \in \mathbb{C}$ так, чтобы

$$1 - C\frac{\exp\left(-Y\sigma^2\right)-1}{\sigma^2} \neq 0 \quad \text{для любого} \quad \sigma \in IR,$$

то задача (4) для уравнения теплопроводности корректна. Подсчет показывает, что C следует выбрать из условия $|C| < Y^{-1}$. Поскольку C следует выбрать из условия

$$|C| \sup_{IR\setminus\{0\}} \frac{1-\exp\left(-Y\sigma^2\right)}{\sigma^2} < 1,$$

то это равносильно $|C| < Y^{-1}$.

1. *Кенне Э.* Критерий регулярности краевой задачи с интегралом в краевом условии. – М., 1992. – Деп. в ВИНИТИ, № 754-В92.
2. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные краевые задачи в слое // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.
3. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292–296.
4. *Ионкин Н. И., Моисеев Е. И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 7. – С. 1279–1283.
5. *Панеях Б. П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 425–434.
6. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* Корректность граничных задач для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 7. – С. 919–926.
7. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.

Получено 26.10.98