УДК 517.944 : 519.46

М. І. Сєров, Л. О. Тулупова, Н. В. Андреєва (Полтав. техн. ун-т)

Q-УМОВНА СИМЕТРІЯ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

We investigate Q-conditional symmetry of a nonlinear two-dimensional heat conduction equation and, by means of anzaces, obtain reduced equations.

Досліджено Q-умовну симетрію нелінійного двовимірного рівняння теплопровідності. За допомогою анзаців одержано редуковані рівняння.

У цій роботі досліджується Q-умовна симетрія (див. [1–3]) двовимірного нелінійного рівняння теплопровідності

$$H(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = F(u), \tag{1}$$

де $u = u(x) \in R_1$, $x = u(t, \bar{x})$, $\bar{x} \in R_2$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2};$$

$H(u)$ та $F(u)$ — довільні гладкі функції.

Умовна та Q-умовна симетрії одновимірного рівняння теплопровідності досліджені в [4–7].

На відміну від одновимірного випадку Q-умовну симетрію рівняння (1) будемо досліджувати як відносно одного оператора

$$Q = A(x, u)\frac{\partial}{\partial t} + B^a(x, u)\frac{\partial}{\partial x_a} + C(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2}$$

так і відносно двовимірної алгебри операторів вигляду (2).

Умовна симетрія рівняння (1) відносно операторів (2) означає його сумісність з рівнянням

$$A(x, u)\frac{\partial u}{\partial t} + B^\alpha(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = C(x, u).$$

Теорема 1. *Рівняння* (1) *є* Q*-умовно інваріантним відносно оператора* (2), *якщо функції* A, B^a, C *задовольняють наступні умови*:

Випадок 1. $A = 1$ (*це не зменшує загальності*):

$$\begin{gathered} B_u^a = C_{uu} = 0, \quad B_1^1 = B_2^2, \quad B_2^1 = -B_1^2, \\ \dot{H}C^2 - \dot{F}C + HC_t + \Delta C + FC_u - 2B_2^2(F - HC) = 0, \\ \dot{H}CB^a + HB_t^a - 2C_{au} + 2HB^aB_1^1 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Випадок 2. $A = 0$, $B^1 = 1$:

$$\begin{gathered} \dot{H}C = 0, \quad B_u^2 = B_a^2 = C_{uu} = 0, \quad 2B^2C_{1u} + HB_t^2 = 2C_{2u}, \\ HC_t - \dot{F}C + FC_u + 2CC_{1u} + \Delta C = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Нижній індекс означає диференціювання за відповідним аргументом.

Теорема 1 доводиться методом з [1].

Системи визначальних рівнянь (3) та (4) у загальному вигляді розв'язати не вдалося. Ми знайшли тільки декілька їх частинних розв'язків. Наприклад, для

$H=1$, $F=u\ln u$ справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u = u\ln u \tag{5}$$

є сумісним з диференціальним рівнянням першого порядку

$$u_1+e^{-t}u_2 = \frac{1}{2}x_1 u . \tag{6}$$

Підстановкою

$$u = \exp\frac{x_1^2}{4}\varphi(t,\omega), \qquad \omega = x_2\exp t - x_1,$$

що є розв'язком рівняння (6), рівняння (5) редукується до рівняння

$$\varphi_t + \omega\varphi_\omega + \varphi_{\omega\omega}\left(e^{2t}+1\right) = \varphi\left(\ln\varphi-\frac{1}{2}\right).$$

У випадку умовної симетрії рівняння (1) відносно двовимірної алгебри операторів вигляду (2) визначальні рівняння для коефіцієнтів Q-операторів більш складні, ніж в теоремі 1. Проте у тому випадку, коли ці коефіцієнти залежать тільки від u, система визначальних рівнянь значно спрощується і тоді можна знайти її загальний розв'язок. Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Рівняння теплопровідності* (1) *є сумісним з системою двох рівнянь першого порядку*

$$\begin{gathered} a(u)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1} = G(u), \qquad G\neq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$G(u) = \frac{P_3(a)}{a'},$$

де $P_3(a)=\lambda_3 a^3+\lambda_2 a^2+\lambda_1 a+\lambda_0$ *— поліном третього порядку,*

$$F(u) = G\left(\dot G-\lambda_3 a'\right), \quad H(u) = \dot G a-\frac{1}{2}\ddot G, \quad a = \operatorname{tg}(\alpha u+\beta). \tag{8}$$

Підстановка

$$\varphi(\omega) = t-x_2-\int\frac{a(u)\,du}{G(u)}, \qquad \omega = x_1-\int\frac{du}{G(u)} \tag{9}$$

зводить рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння

$$\ddot\varphi = P_3(\dot\varphi), \tag{10}$$

загальний розв'язок якого можна записати в параметричному вигляді:

$$\omega = \int\frac{d\sigma}{P_3(\sigma)}+c_1, \qquad \varphi = \int\frac{\sigma\,d\sigma}{P_3(\sigma)}+c_2. \tag{11}$$

Доведення. Для довільної функції φ рівність (9) дає загальний розв'язок системи (7). З (9) одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{G}{a-\dot{\varphi}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{-G\dot{\varphi}}{a-\dot{\varphi}}. \tag{12}$$

Оскільки з системи (7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

то підставляючи (12) в рівняння (1), одержуємо для φ рівняння (10), в якому коефіцієнти многочлена P_3 явно виражаються через $a(u)$, $G(u)$, $F(u)$ і $H(u)$. З умови, що ці коефіцієнти є сталими, випливає (8).

За розв'язком (10) знаходимо загальний розв'язок рівняння (1):

$$x_1 - \int\limits_0^{\operatorname{tg} u} \frac{d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{d\sigma}{P_3(\sigma)} + c_1, \qquad t - x_2 - \int\limits_0^{\operatorname{tg} u} \frac{\tau\, d\tau}{P_3(\tau)} = \int \frac{\sigma\, d\sigma}{P_3(\sigma)} + c_2.$$

Крім цього розв'язку були знайдені інші частинні випадки умовної симетрії рівняння (1). Нижче наведені одержані результати в такому порядку: рівняння, анзац, редуковане рівняння.

1. $$\lambda_1 u^k \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \lambda_2 u^{k+1};$$

$$u = \left(\bar{x}^2\right)^{-1/k} \varphi(\omega), \quad \omega = t + \ln\left(\bar{x}^2\right);$$

$$\lambda_1 \dot{\varphi} \varphi^k - \frac{8}{k}\dot{\varphi} + \frac{4}{k^2}\varphi + 4\ddot{\varphi} - \lambda_2 \varphi^{k+1} = 0.$$

2. $$u\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \lambda;$$

$$u = -\frac{4t}{\bar{x}^2} + \varphi(\omega), \qquad \omega = \bar{x}^2;$$

$$\omega\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} - \frac{\varphi}{\omega} - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

3. $$2\ln u \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = u\ln u - u\ln^2 u + \lambda u;$$

$$u = \exp\left\{\exp\left(x_1 - t\right) + \varphi(\omega)\right\}; \qquad \omega = x_1 + x_2 - t;$$

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

4. $$\lambda\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 2u\ln u + \lambda_1 u;$$

$$u = \exp\left\{\frac{\bar{x}^2}{2} + \varphi(\omega)\right\}; \qquad \omega = \frac{\lambda}{2}\exp\left(\frac{2}{\lambda}t\right) - \bar{\alpha}\bar{x},$$

$\bar{\alpha}$ — довільний сталий вектор;

$$\ddot{\varphi} + \omega\dot{\varphi} + \lambda_1\varphi - \varphi\ln\varphi = 0.$$

5. $$\left(\lambda_1 u^{2/(2-m)} + \lambda_2\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \lambda_3 u^{(4-m)/(2-m)}; \qquad m \neq 2, \quad m \neq 4;$$

$$u = \left(\bar{x}^2\right)^{(2-m)/2} \varphi(\omega), \quad \omega = t + \frac{\lambda_2}{2(m-4)}\bar{x}^2;$$

$$\lambda_1 \varphi^{2/(2-m)}\dot{\varphi} + \frac{\lambda_2}{(m-4)^2}\ddot{\varphi} = \lambda_3 \varphi^{(4-m)/(2-m)};$$

6. $$\lambda_1 u^{\frac{3n-8}{2-n}} \frac{\partial u}{\partial t} + u\Delta u = \lambda_3 u^{\frac{2n-6}{2-n}}, \quad \vec{x} \in R_n, \quad n \neq 2;$$

$$u = |\vec{x}|^{2-n}\varphi(\omega), \quad \omega = t + k|\vec{x}|^{n-2};$$

$$\lambda_1 u^{\frac{3n-8}{2-n}}\dot{\varphi} + k^2(n-2)\ddot{\varphi} = \lambda_3 u^{\frac{2n-6}{2-n}}.$$

1. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 339 с.
2. *Фущич В. И.* Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 4–16.
3. *Фущич В. И.* Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 11. – С. 1456–1470.
4. *Серов Н. И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Там же. – 1990. – **42**, № 10. – С. 1370–1376.
5. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 24–27.
6. *Fushchich W. I., Serov N. I., Tulupova L. A.* The conditional invariance and exact solutions of the nonlinear diffusion equation // Dop. Ukr. Acad. Nauk. – 1993. – № 4. – P. 37–40.
7. *Фущич В. И., Серов Н. И., Амеров Т. К.* Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 11. – С. 15–18.

Одержано 29.06.98,
після доопрацювання — 15.06.99