УДК 517.956.4

А.Т. Асанова
(Ин-т теорет. и прикл. математики М-ва науки — Акад. наук Республики Казахстан, Алматы)

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОМ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

We obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of a bounded almost periodic solution of semilinear equation of the parabolic type.

Одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого майже періодичного розв'язку напівлінійного рівняння параболічного типу.

Почти периодические решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных исследовались с помощью различных методов многими авторами (подробные комментарии и библиографию можно найти в [1–3]). В настоящей работе исследуется ограниченное почти периодическое одновременно по временной и пространственным переменным решение полулинейного уравнения параболического типа и выводится коэффициентный критерий, который обеспечивает его существование и единственность.

Рассматривается полулинейное уравнение параболического типа

$$Lu \equiv u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u = F(t,x,u,u_x), \qquad (1)$$

где $u = u(t,x)$, $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in E^n$, $u_x = \left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right)$.

Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $a_{ij}(t,x) \in CAP_{t,x}^{\nu/2,\nu}\left(E^{1+n}\right)$, где $CAP_{t,x}^{\nu/2,\nu}\left(E^{1+n}\right)$ — пространство почти периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера по t и x с показателями $\nu/2$ и $\nu \in (0, 1]$ [3], и образуют симметрическую матрицу $A(t,x)$, для которой имеет место условие равномерной параболичности оператора L:

$$a_0|\xi|^2 \le (A(t,x)\xi, \xi) \le a_1|\xi|^2 \qquad \forall (t,x) \in E^{1+n}, \qquad \forall \xi \in E^n,$$

где a_0, a_1 — положительные постоянные;

2) $b_i(t,x)$, $c(t,x) \in CAP_{t,x}^{0,\nu}\left(E^{1+n}\right)$, $c(t,x) \ge \gamma > 0$ $\forall (t,x) \in E^{1+n}$, $\gamma = \mathrm{const}$;

3) при фиксированных $(u, u_x) \in E^{1+n}$ $F(t,x,u,u_x) \in CAP_{t,x}^{\nu/2,\nu}\left(E^{1+n}\right)$ с константой Гельдера H, не зависящей от (u, u_x), а при фиксированных t, x удовлетворяет условию

$$\left|F(t, x, f_0, f) - F(t, x, g_0, g)\right| \le \sum_{i=0}^{n} C_0(hf_0 + (1-h)g_0)\left|f_i^{p_i} - g_i^{p_i}\right|,$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, p_i — целые неотрицательные числа и $p = \max\limits_{i=\overline{0,n}} p_i$, $C_i(\cdot)$, $i = \overline{0,n}$, — неубывающие непрерывные положительные функции, ограниченные при ограниченных значениях аргумента, $h \in (0, 1)$. Пусть

$$F_0 = \sup_{E^{1+n}} |F(t,x,0,0)|, \quad K_0 = \frac{C_0\left(\frac{hp}{(p-1)\gamma}F_0\right)M}{\gamma},$$

$$K_i = \frac{C_i\left(\frac{hp}{(p-1)\gamma}F_0\right)M\,\Gamma^{p_i}\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\gamma^{1+\frac{(\nu-1)p_i}{2}}},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, M — положительная постоянная, фигурирующая в оценке фундаментального решения $U(t, s, x, \xi)$ уравнения (1) с нулевой правой частью.

Справедлива следующая теорема.3

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1 — 3 *и соотношение*

$$q \equiv \sum_{i=0}^{n} \frac{K_i p^{p_i}}{[(p-1)\gamma]^{p_i-1}} F_0^{p_i-1} < 1. \tag{2}$$

Тогда почти периодическое решение u^* *уравнения* (1), *для которого справедлива оценка* $\left|u^*(t,x)\right| \le \dfrac{pM}{(p-1)}F_0$ *для всех* $(t, x) \in E^{1+n}$, *существует и единственно.*

Доказательство проводится методом последовательных приближений: m-е приближение определяется из линейного уравнения

$$Lu^m = F\left(t, x, u^{m-1}, u_x^{m-1}\right).$$

Его почти периодическое решение имеет вид

$$u^m(t, x) = u^0(t, x) + \int_{-\infty}^{t}\int_{E^n} U(t, s, x, \xi)\, F\left(s, \xi, u^{m-1}(s, \xi), u_\xi^{m-1}(s, \xi)\right) d\xi\, ds,$$

где начальное приближение $u^0(t, x)$ — решение уравнения $Lu = F(t, x, 0, 0)$. Последовательно оценивая u^m, получаем

$$\left|u^m(t, x)\right| \le \alpha_0 + \frac{M}{\gamma}\left[C_0(h\alpha_{m-1})\alpha_{m-1}^{p_0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(h\alpha_{m-1})\beta_{m-1}^{p_i}\right] = \alpha_m,$$

$$\left|u_{x_i}^{m}(t, x)\right| \le \frac{M\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\gamma}{\gamma^{(\nu+1)/2}}\alpha_m = \beta_m, \quad i = \overline{1, n}.$$

Несложно проверить, что α_m, β_m — ограниченные монотонно возрастающие и сходящиеся при выполнении (2) последовательности. Тогда для любого $m = 0, 1, \ldots$ имеем

$$\left|u^{m+1} - u^m\right| \le \alpha_0 q^{m+1}, \qquad \left|u_{x_i}^{m+1} - u_{x_i}^{m}\right| \le \beta_0 q^{m+1}.$$

Поскольку $q<1$, последовательности $\{u^m\}$, $\{u^m_{x_i}\}$ равномерно сходятся. Последовательные приближения производных и их константы Гельдера оцениваются так же, как в [4], и при выполнении соотношения (2) будут ограниченными и равномерно сходящимися. Из равномерной сходимости последовательных приближений вытекает, что предельная функция $u^*(t, x)$ будет почти периодической. Единственность $u^*(t, x)$ доказывается методом от противного. Теорема доказана.

1. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
2. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
3. *Умбетжанов Д.У.* Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 09.02.98,
после доработки — 14.12.98