УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В КРУГЕ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ. II *

We develop new methods of the solution of boundary-value problems in the meridional plane of axially symmetric potential solenoid field with regard for character and specific properties of axially symmetric problems. We explicitly obtain solutions of Dirichlet problem for axially symmetric potential and for the Stokes flow function in a disk.

Розроблено нові методи розв'язання крайових задач в меридіанній площині осесиметричного потенціального соленоїдального поля, що враховують природу та специфічні особливості осесиметричних задач. Одержано в явному вигляді розв'язки задач Діріхле для осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса в крузі.

Данная работа является продолжением работы [1] и имеет общие с ней обозначения, нумерацию пунктов, лемм и теорем.

3. Решение задачи Дирихле в круге для функции тока Стокса. В работе [1] показано, что решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в единичном круге D можно найти в результате решения интегрального уравнения

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt \;=\; \psi_{\partial D}(x,y), \tag{1}$$

где $(x,y)\in\partial D$, $y\neq 0$, $z=x+iy$, а искомая функция F голоморфна в круге D_z и удовлетворяет условию

$$F(\overline{z}) \;=\; \overline{F(z)} \qquad \forall\, z\in D_z. \tag{2}$$

При решении интегрального уравнения (1) используются леммы 2, 3 из [1], а также приведенные ниже леммы 6 – 10.

Лемма 6. *Пусть функция* $u:(0;\infty)\to\mathbb{C}$ *интегрируема на множестве* $(0;\infty)$, *а на каждом ограниченном промежутке* $(0;\xi]$ *интегрируема в степени* p, $p>1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau u(s)}{s^2-\tau^2}\,ds\,d\tau \;=\; \xi^2\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{s(s^2-\xi^2)}\int\limits_0^{s}u(\tau)\,d\tau\,ds\,.$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau u(s)}{s^2-\tau^2}\,ds\,d\tau \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}u(s)\int\limits_0^{\xi}\left(\frac{1}{s-\tau}-\frac{1}{s+\tau}\right)d\tau\,ds \;=$$

$$=\; -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}u(s)\ln\frac{|s-\xi|(s+\xi)}{s^2}\,ds \;=\; -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}u(s)\ln\frac{|s-\xi|}{s+\xi}\,ds-\int\limits_0^{\infty}u(s)\ln\frac{s+\xi}{s}\,ds \;=$$

$$=\; \int\limits_0^{\infty}u(s)\int\limits_0^{\xi}\frac{\xi}{t^2-\xi^2}\,dt\,ds-\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{s}u(t)\,dt\,\frac{s}{s+\xi}\frac{\xi}{s^2}\,ds \;=$$

$$=\; \int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{t^2-\xi^2}\int\limits_0^{t}u(s)\,ds\,dt-\int\limits_0^{\infty}\frac{\xi}{s(s+\xi)}\int\limits_0^{s}u(t)\,dt\,ds \;=$$

---

* Выполнена при частичной поддержке Министерства Украины по вопросам науки и технологий (договор № 2М/1401-97).

$$= \int_0^\infty \frac{\xi}{s^2-\xi^2}\int_0^s u(\tau)\,d\tau\,ds - \int_0^\infty \frac{\xi}{s(s+\xi)}\int_0^s u(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \xi^2\int_0^\infty \frac{1}{s(s^2-\xi^2)}\int_0^s u(\tau)\,d\tau\,ds.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ класс функций $g_*: \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, для каждой из которых

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} g_*(\tau) = 0$$

и существуют $\nu_0,\ \nu_\infty\in(0;1]$ и положительное число N такие, что выполняются условия

$$|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)| \le c\left|\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right|^{\nu_\infty} \qquad \forall\,\tau_1,\tau_2\in(-\infty,-N]\cup[N,\infty),$$

$$|g_*(\tau_1)-g_*(\tau_2)| \le c\left|\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right|^{\nu_0} \qquad \forall\,\tau_1,\tau_2\in[-N,N]\setminus\{0\},$$

в которых постоянная c не зависит от τ_1 и τ_2.

Лемма 7. *Если функция* $g_*\in\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и* $g_*'\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$, *то*

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*'(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\varepsilon\in(0,|\xi|/2)$, $g_0(\tau):=g_*(\tau)-g_*(\infty)$. Имеют место равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{g_0(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau =$$

$$= g_0(-\varepsilon)\ln(-\xi-\varepsilon) - g_0(\varepsilon)\ln(\varepsilon-\xi) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{g_0(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau -$$

$$-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)g_0'(\tau)\ln(\tau-\xi)\,d\tau.$$

Дифференцируя последнее равенство по ξ, как и в [2, с. 43], получаем

$$\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \frac{g_0(-\varepsilon)}{\xi+\varepsilon} - \frac{g_0(\varepsilon)}{\xi-\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{g_0(\tau)}{(\tau-\xi)^2}\,d\tau - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{g_*'(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau.$$

Теперь, переходя в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем равенство (3). Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть нечетная функция* $\tilde{g}_*\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и такая, что функция* $\tau\tilde{g}_*'(\tau)$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds\right) =$$

$$= \frac{1-\xi^2}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\xi}\,ds \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Доказательство. Учитывая нечетность функции $\tilde g_*$ и лемму 7, при $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds\right) =$$

$$= -\frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\xi}\,ds =$$

$$= -\frac{2\xi^2}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\xi}\,ds =$$

$$= \frac{1-\xi^2}{(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\xi}\,ds.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть функция* $\psi\colon [0,\infty)\to\mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}\psi(\tau) = \psi(0) = 0, \tag{4}$$

$$|\,\psi(s) - \psi(\xi)\,| \le c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{s^{\alpha-\nu}\xi^\alpha} \qquad \forall\, s,\xi\colon 1\le s<\xi, \tag{5}$$

$$|\,\psi(s) - \psi(\xi)\,| \le c\,\frac{|s-\xi|^\alpha}{\xi^\nu} \qquad \forall\, s,\xi\colon 0\le s<\xi\le 3, \tag{6}$$

в которых $\alpha\in(1/2;1]$, $\nu\in[0;\alpha)$, *а постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ.

Тогда функция $(\xi+i)\,U_*(\xi)$ *принадлежит классу* $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. *Здесь функция* U_* *определяется равенством*

$$U_*(\tau) = \frac{2\tau}{(\tau^2+1)^2}\,\tilde g_*(\tau) + \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\,\tilde g_*'(\tau) + \frac{\tau^2-1}{\pi(\tau^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\tau}\,ds \,-$$

$$- \frac{1}{\pi(\tau^2+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\tau}\,ds \qquad \forall\, \tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{7}$$

в котором

$$\tilde g_*(\tau) := \begin{cases} g_*(\tau) & \text{при } \tau>0; \\ -g_*(-\tau) & \text{при } \tau<0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$g_*(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{\sqrt{s^2+1}\,\psi(s)}{2s\sqrt{\tau^2-s^2}}\,ds \qquad \forall\, \tau>0. \tag{9}$$

Доказательство. Описанным в [2, с. 573] способом устанавливается равенство

$$g_*'(\xi) = \psi_*(\xi) - \xi \int_0^\xi \frac{s(\psi_*(s) - \psi_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}} ds, \tag{10}$$

где

$$\psi_*(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2+1}}{2\xi^2}\psi(\xi).$$

Легко устанавливается, что для функции ψ_* выполняются условия вида (34), (35) из работы [1] при $\alpha_\infty = \alpha - \nu + 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_0 = 2 - \alpha + \nu$. Поэтому согласно лемме 3 из [1] справедливы оценки

$$|g_*'(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1+\alpha-\nu}} \quad \forall\, \xi \ge 2, \tag{11}$$

$$|g_*'(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{2-\alpha+\nu}} \quad \forall\, \xi \in (0;2), \tag{12}$$

$$|g_*'(\xi+\varepsilon) - g_*'(\xi)| \le c\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{2\alpha-\nu+1/2}} \quad \forall\, \xi \ge 2, \quad \forall\, \varepsilon \in (0;\xi/2], \tag{13}$$

$$|g_*'(\xi+\varepsilon) - g_*'(\xi)| \le c\frac{\varepsilon^{\alpha-1/2}}{\xi^{3/2+\nu}} \quad \forall\, \xi \in (0;2), \quad \forall\, \varepsilon \in (0;\xi/2]. \tag{14}$$

В силу леммы 2 из [1] $\lim\limits_{\xi\to\infty} g_*(\xi) = 0$. Из этого равенства и оценки (11) следует оценка

$$|g_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\alpha-\nu}} \quad \forall\, \xi \ge 2. \tag{15}$$

Кроме того, при $2 - \alpha + \nu > 1$ очевидным следствием оценки (12) является неравенство

$$|g_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{1-\alpha+\nu}} \quad \forall\, \xi \in (0;2), \tag{16}$$

а в случае, когда $2 - \alpha + \nu = 1$ (т. е. при $\alpha = 1$, $\nu = 0$), это же неравенство легко устанавливается непосредственно оценкой интеграла (9).

С учетом оценок (11) – (16) путем несложных выкладок устанавливается, что функция $(\xi + i)\,U_*(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. При этом для оценки сингулярных интегралов Коши, входящих в равенство (7), и их локальных модулей непрерывности используется теорема 2 из [3]. Лемма доказана.

Лемма 10. *При условиях леммы 9 справедливы оценки*

$$\left|(\xi+i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right| \le \frac{c}{\xi^{\beta_\infty}} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}: |\xi| > 1, \ \operatorname{Im}\xi > 0,$$

$$\left|(\xi+i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right| \le \frac{c}{\xi^{\beta_0}} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{C}: |\xi| < 1, \ \operatorname{Im}\xi > 0,$$

при некоторых $\beta_0, \beta_\infty \in (0, 1)$ *и не зависящей от* ξ *постоянной* c.

Доказательство. Очевидно, что в силу леммы 8 выполняется равенство

$$U_*(\xi) = \frac{d}{d\xi}U(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{17}$$

где

$$U(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi^2+1}\tilde{g}_*(\xi) - \frac{\xi}{\pi(\xi^2+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds\,.$$

Кроме того, для функции $U(\xi)$ имеют место равенства

$$\lim_{\xi\to 0} U(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} U(\xi) = 0, \tag{18}$$

которые легко устанавливаются с учетом оценок (15), (16) и оценки модуля сингулярного интеграла Коши, полученной в теореме 2 из [3].

Учитывая четность функции U_* и равенства (17), (18), получаем

$$(\xi+i)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\tau+i)U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau - 2\int\limits_{0}^{\infty}U_*(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\tau+i)U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\,.$$

Согласно лемме 9 имеем $(\tau+i)\,U_*(\tau)\in\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Поэтому из последнего равенства и классических результатов [4] о поведении интеграла типа Коши в окрестности точек разрыва плотности очевидным образом следует утверждение леммы.

В следующей теореме устанавливается формула решения задачи Дирихле в круге для функции тока Стокса.

Теорема 5. *Пусть функция* $\psi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, *и удовлетворяет условиям*

$$\psi_{\partial D}(1;0) = \psi_{\partial D}(-1;0) = 0, \tag{19}$$

$$\psi_{\partial D}(x,-y) = \psi_{\partial D}(x,y) \qquad \forall\,(x,y)\in\partial D. \tag{20}$$

Тогда решение задачи Дирихле для функции тока Стокса в круге D *выражается формулой*

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\partial D_z}\frac{F_*\left(i\,\dfrac{1+t}{1-t}\right)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\,dt & \text{при } \; y\neq 0; \\ 0 & \text{при } \; y=0, \end{cases} \tag{21}$$

в которой $z = x+iy$,

$$F_*(\xi) = (\xi+i)^2\,U_*(|\xi|) + \frac{2\xi(\xi+i)^2}{\pi i}\int\limits_0^\infty\frac{U_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{22}$$

где

$$U_*(\tau) = \frac{2\tau}{(\tau^2+1)^2}\,g_*(\tau) + \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\,g_*'(\tau) +$$

$$+\frac{2(\tau^2-1)}{\pi(\tau^2+1)^2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,g_*(s)}{s^2-\tau^2}\,ds - \frac{2}{\pi(\tau^2+1)}\int\limits_0^\infty\frac{s^2\,g_*'(s)}{s^2-\tau^2}\,ds, \tag{23}$$

$$g_*(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{s\psi_*(s)}{2\sqrt{\tau^2 - s^2}}\, ds\,, \tag{24}$$

а функция ψ_* *связана с заданными граничными значениями* $\psi_{\partial D}$ *равенством*

$$\psi_*(\tau) = \frac{\sqrt{\tau^2+1}}{\tau^2}\,\psi_{\partial D}\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{-2\tau}{\tau^2+1}\right) \qquad \forall\, \tau > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение (1), в котором $z = x + iy \in \partial D_z \setminus \{-1; 1\}$, а искомая функция F непрерывна на множестве $\overline{D_z} \setminus \{-1;1\}$, голоморфна в круге D_z, удовлетворяет условию (2) и, кроме того, может иметь слабостепенной рост в окрестности точек ± 1:

$$|F(z)| \le c(|z-1|^{-\beta} + |z+1|^{-\beta}) \qquad \forall\, z \in \overline{D_z} \setminus \{-1;1\}, \tag{25}$$

где $\beta \in (0;1)$ и постоянная c не зависит от z.

Выполним ряд преобразований уравнения (1). Учитывая, что при замене переменных $t = \dfrac{\tau - i}{\tau + i}$, $z = \dfrac{\xi - i}{\xi + i}$, где $\tau, \xi \in \mathbb{R}$, справедливы равенства

$$t - x = t - \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{\tau - i}{\tau + i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - i}{\xi + i} + \frac{\xi + i}{\xi - i}\right) = \frac{2(\tau - i\xi^2)}{(\tau + i)(\xi^2 + 1)},$$

путем таких же рассуждений, как при доказательстве теоремы 4 из [1] получено равенство (55), интегральное уравнение (1) приводится к уравнению

$$-\frac{2}{\pi i}\int_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)(\tau - i\xi^2)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\frac{d\tau}{(\tau + i)^2} = \tilde{\psi}_*(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{26}$$

где $F_*(\tau) := F\left(\dfrac{\tau - i}{\tau + i}\right)$, $\quad \tilde{\psi}_*(\xi) := \sqrt{\xi^2 + 1}\,\psi_{\partial D}\left(\dfrac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \dfrac{-2\xi}{\xi^2 + 1}\right)$.

Введем в рассмотрение функцию $H_*(\tau) := \dfrac{F_*(\tau)}{(\tau + i)^2}$ при $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon \operatorname{Im}\tau \ge 0$. Ввиду четности функции $\tilde{\psi}_*$ уравнение (26) равносильно уравнению

$$-\frac{2}{\pi i}\int_0^{\xi} \frac{H_*(\tau)(\tau - i\xi^2) - H_*(-\tau)(\tau + i\xi^2)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}}\, d\tau = \tilde{\psi}_*(\xi) \qquad \forall\, \xi > 0. \tag{27}$$

Учитывая условие (2), легко получаем равенство $H_*(-\tau) = \overline{H_*(\tau)}$ при всех $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, с учетом которого уравнение (27) приводим к виду

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{\operatorname{Re} H_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau - \frac{4}{\pi\xi^2}\int_0^{\xi} \frac{\tau \operatorname{Im} H_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau = \psi_*(\xi), \tag{28}$$

где $\psi_*(\xi) := \xi^{-2}\,\tilde{\psi}_*(\xi)$.

Полагая в равенстве (28) $\xi = s$, а затем умножая обе части этого равенства на $s(\xi^2 - s^2)^{-1/2}$ и, наконец, интегрируя по переменной s на отрезке $[0, \xi]$, получаем равенство

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{s}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\int_0^{s} \frac{\operatorname{Re} H_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau\, ds - \frac{4}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{1}{s\sqrt{\xi^2 - s^2}}\int_0^{s} \frac{\tau \operatorname{Im} H_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}}\, d\tau\, ds =$$

$$= \int_0^{\xi} \frac{s\psi_*(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\, ds\,.$$

Изменив порядок интегрирования в повторных интегралах, из этого равенства получим

$$2\int_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\,d\tau - \frac{2}{\xi}\int_0^{\xi} \operatorname{Im} H_*(\tau)\,d\tau = \int_0^{\xi} \frac{s\psi_*(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds. \tag{29}$$

Используя формулу Гильберта для обращения сингулярного интеграла Коши [2, с. 93], с учетом четности функции $\operatorname{Re} H_*(\tau)$ получаем равенства

$$\operatorname{Im} H_*(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} H_*(s)}{s-\tau}\,ds = -\frac{2\tau}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} H_*(s)}{s^2-\tau^2}\,ds \qquad \forall\,\tau > 0.$$

Подставляя полученное для $\operatorname{Im} H_*(\tau)$ выражение в равенство (29), с учетом леммы 6 имеем

$$2\int_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\,d\tau + \frac{4\xi}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{s(s^2-\xi^2)}\int_0^{s} \operatorname{Re} H_*(\tau)\,d\tau\,ds = \int_0^{\xi} \frac{s\psi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds. \tag{30}$$

Введем в рассмотрение четную функцию $u_*(\xi) := \xi^{-1}\int_0^{\xi} \operatorname{Re} H_*(\tau)\,d\tau \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и перепишем равенство (30) в виде

$$\xi u_*(\xi) + \frac{2\xi}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{u_*(s)}{s^2-\xi^2}\,ds = g_*(\xi) \qquad \forall\,\xi > 0, \tag{31}$$

где функция g_* определяется формулой (24).

Поскольку теперь левая часть равенства (31) является нечетной функцией, то рассмотрим также нечетную функцию (8), сужением которой на полупрямую $(0,\infty)$ является функция g_*.

Наконец, для нахождения функции u_* с учетом ее четности из (31) получаем характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [2, с. 189]:

$$\xi u_*(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_*(s)}{s-\xi}\,ds = \tilde{g}_*(\xi) \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{32}$$

которое разрешимо в явном виде. Учитывая, что индекс [2, с. 176] этого уравнения $\kappa := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\arg\frac{\xi - i}{\xi + i} = 1$, его решение u_* находим по формуле [2, с. 190]

$$u_*(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2+1}\tilde{g}_*(\xi) - \frac{1}{\pi(\xi - i)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}_*(s)}{s+i}\frac{ds}{s-\xi} + \frac{a}{\xi^2+1},$$

в которой a — вообще говоря, произвольное комплексное число.

С учетом нечетности функции $\tilde{g}_*$ преобразуем эту формулу к виду

$$u_*(\xi) = \frac{\xi}{\xi^2+1}\tilde{g}_*(\xi) - \frac{\xi + i}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}_*(s)}{s+i}\frac{ds}{s-\xi} + \frac{a}{\xi^2+1} =$$

$$= \frac{\xi}{\xi^2+1}\tilde{g}_*(\xi) - \frac{1}{\pi(\xi^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}_*(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{1}{\xi^2+1}\left(a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s\tilde{g}_*(s)}{s^2+1}\,ds\right). \tag{33}$$

Поскольку функция u_* должна принимать только действительные значения, то, очевидно, что в равенствах (33) постоянная a может быть произвольным действительным числом.

Заметим, что из условий (19) и $\psi_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \le 1$, следует, что функция $\psi(\xi) := \dfrac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+1}}\,\psi_*(\xi)$ удовлетворяет условиям (4) – (6), причем $\nu \in$ $\in [0, \alpha)$ — некоторое число, существование которого для функции $\psi_{\partial D} \in$ $\in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ следует из определения класса $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ (см. неравенство (24) работы [1]). Поэтому имеет место равенство (10) и оценки (11) – (14), из которых следует, что функция $\xi\,\tilde g_*'(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Теперь с учетом леммы 8 находим функцию $\operatorname{Re} H_*(\xi)$:

$$\operatorname{Re} H_*(\xi) = \frac{d}{d\xi}(\xi\,u_*(\xi)) = \frac{2\xi}{(\xi^2+1)^2}\,\tilde g_*(\xi) + \frac{\xi^2}{\xi^2+1}\,\tilde g_*'(\xi) +$$

$$+ \frac{\xi^2-1}{\pi(\xi^2+1)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde g_*(s)}{s-\xi}\,ds - \frac{1}{\pi(\xi^2+1)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\,\tilde g_*'(s)}{s-\xi}\,ds + \frac{a(\xi^2-1)}{(\xi^2+1)^2} \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

где a — произвольная действительная постоянная.

Функция H_* находится в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [5, с. 209]:

$$H_*(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} H_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi > 0.$$

Наконец, находим функцию F_*:

$$F_*(\xi) = (\xi+i)^2 H_*(\xi) = \frac{(\xi+i)^2}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} H_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau =$$

$$= \frac{(\xi+i)^2}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{U_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau + a \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi > 0, \tag{34}$$

где функция U_* определяется равенством (7), а a — произвольное действительное число.

Из лемм 9, 10 следует, что функция F_* непрерывно продолжается из верхней полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi > 0\}$ на множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и может иметь слабостепенной рост в окрестностях бесконечно удаленной точки и точки 0:

$$|F_*(\xi)| \le c(|\xi|^\beta + |\xi|^{-\beta}) \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}\xi > 0,$$

где β — некоторое число из интервала $(0; 1)$, а постоянная c не зависит от ξ. Следовательно, функция $F(t) := F_*\!\left(i\,\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ является решением интегрального уравнения (1) и выполняется неравенство (25).

Поскольку

$$\int\limits_{\partial D_z}\frac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = 0 \qquad \forall\,z \in D_z,$$

то все найденные решения уравнения (1) при различных постоянных a в формуле (34) порождают одно и то же решение задачи Дирихле для функции тока Стокса согласно формуле

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)\,(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt & \text{при} \quad z = x+iy,\ y \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad y = 0. \end{cases}$$

В частности, при $a = 0$ получаем формулу (21), в которой предельные значения функции F_* на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ выражаются согласно формуле Сохоцкого [2, с. 47] и с учетом четности функции U_* записываются в виде (22). С учетом нечетности функции $\tilde{g}_*$ равенство (7) приводится к виду (23). Теорема доказана.

4. Ряды Фурье – Лежандра и задачи Дирихле в круге меридианной плоскости. В работе [6] установлена связь осесимметричных потенциальных полей с аналитическими функциями векторного аргумента. Эта связь показывает, что полиномы Лежандра

$$P_n(x) \;:=\; \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n$$

и присоединенные полиномы Лежандра

$$P_n^1(x) \;:=\; \sqrt{1-x^2}\;\frac{dP_n(x)}{dx}$$

в теории решений уравнений (1), (2) играют такую же роль, как тригонометрические ряды Фурье в теории плоских гармонических функций.

В частности, известно, что решение задачи Дирихле в круге для двумерного уравнения Лапласа может быть получено в результате разложения заданных граничных значений искомой гармонической функции в тригонометрический ряд Фурье [7, с. 603]. Аналогичные факты имеют место в теории задач Дирихле для осесимметричного потенциала и для функции тока Стокса в круге меридианной плоскости.

Так, рассмотрим ряд Фурье функции $\varphi_{\partial D}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$ по полиномам Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P_n(x), \tag{35}$$

где $a_n \;:=\; \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_{\partial D}\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) P_n(t)\,dt$.

Если функция $\varphi_{\partial D}$ удовлетворяет условию вида (20), а ряд (35) равномерно сходится (или равномерно суммируем методом Чезаро некоторого порядка $\kappa > > 0$, или же равномерно суммируем по Абелю) на отрезке $[-1;\, 1]$ к функции $\varphi_{\partial D}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, то функция

$$\varphi(x,y) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x^2+y^2)^{n/2}\,P_n\big(x(x^2+y^2)^{-1/2}\big) \tag{36}$$

является решением задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в единичном круге D.

Идея построения решения задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге в виде (36) описана в монографии [8, с. 124].

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{1-x^2}\, P_n^1(x)\,, \tag{37}$$

где $b_n := \dfrac{2n+1}{2n(n+1)} \int_{-1}^{1} \dfrac{\psi_{\partial D}\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} P_n^1(t)\, dt$ — коэффициенты Фурье функции $\dfrac{\psi_{\partial D}\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}$ относительно присоединенных полиномов Лежандра P_n^1.

Если функция $\psi_{\partial D}$ удовлетворяет условиям (19), (20), а ряд (37) равномерно сходится (или равномерно суммируем методом Чезаро некоторого порядка $\kappa > 0$, или же равномерно суммируем по Абелю) на отрезке $[-1; 1]$ к функции $\psi_{\partial D}\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, то функция

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n |y| (x^2 + y^2)^{n/2} P_n^1\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right)$$

является решением задачи Дирихле для функции тока Стокса в единичном круге D.

1. *Плакса С. А.* Задачи Дирихле для осесимметричных потенциальных полей в круге меридианной плоскости. I // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 492–511.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Салаев В. В.* Некоторые свойства сингулярного оператора // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1966. – №6. – С. 12–17.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228–243.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
8. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 260 с.

Получено 21.10.98