УДК 513.831+512.546

*В. Г. Пестов*

# Пример неметризуемой минимальной топологической группы, единица которой имеет тип $G_\delta$

Отделимая топологическая группа называется минимальной [1], если ее топологию нельзя строго ослабить до отделимой групповой топологии. В настоящей статье построен пример, который дает ответ на вопрос, сформулированный А. В. Архангельским в работах [2 — 4]. Ранее автор построил пример (не минимальной) топологической группы, единица которой имеет тип $G_\delta$ (т. е. является пересечением счетного числа открытых множеств) и топология которой не ослабляется до метризуемой групповой топологии [5].

Предложение 1. *Пусть $X$ — топологическое пространство, $F$ — топологическое поле. Обозначим через $C_p(X, F)$ топологическое векторное пространство (ТВП) (над полем $F$) всех непрерывных отображений из $X$ в $F$ в топологии поточечной сходимости. Пусть для каждого $\bar{\lambda} \in F$ $\bar{\lambda}$ — отображение из $X$ в $F$, тождественно равное $\lambda$. Пусть для непрерывного линейного функционала $\varphi: C_\delta(X, F) \to F$, обладающего свойством $\varphi(\bar{1}) \neq -1$, $\theta[\varphi]$ — отображение ТВП $C_p(X, F)$ в себя, задаваемое правилом $f \mapsto f + \varphi(f)$. Тогда $\theta[\varphi]$ — топологический автоморфизм ТВП $C_p(X, F)$.*

Доказательство. Отображение $\theta[\varphi]$ непрерывно и линейно, являясь поточечной суммой тождественного отображения и непрерывного линейного отображения $f \mapsto \overline{\varphi(f)}$ пространства $C_p(X, F)$ в себя. Наконец, обратное к $\theta[\varphi]$ отображение непрерывно и имеет вид $\theta[\psi]$, где $\psi = -\varphi/(1 + \varphi(\bar{1}))$ — непрерывный линейный функционал.

Пусть $X$ — нульмерное в смысле ind несчетное сепарабельное хаусдорфово пространство (например, пространство иррациональных чисел) и $GF(q)$ — конечное поле простой характеристики $q > 2$ в дискретной топологии. Обозначим через $A$ совокупность всех топологических автоморфизмов ТВП $C_p(X, GF(q))$, имеющих вид $\theta[\varphi]$ для всевозможных непрерывных линейных функционалов $\varphi \in C_p(X, GF(q))'$, для которых $\varphi(\bar{1}) \neq -1$. Нетрудно проверить, что $A$ является группой относительно операции композиции автоморфизмов. Естественное действие группы $A$, снабженной дискретной топологией, на аддитивной группе ТВП $C_p(X, GF(q))$, которую обозначим через $C$, автоматически непрерывно, поэтому полупрямое произведение $G = C \otimes A$ в топологии произведения — топологическая группа (см. [6]).

Поскольку непрерывные отображения из $X$ в $GF(q)$ разделяют точки и замкнутые множества пространства $X$ ввиду его нульмерности, то ТВП $C_p(X, GF(q))$ всюду плотно в тихоновской степени $GF(q)^X$ и неметризуемо одновременно с последним пространством ($X$ несчетно). Если $S$ — счетное всюду плотное подмножество в $X$, то топология ТВП $C_p(X, GF(q))$ может быть ослаблена до (отделимой) топологии поточечной сходимости на $S$; последняя топология метризуема, поэтому любой элемент пространства $C$ имеет тип $G_\delta$. Учитывая дискретность группы $A$, заключаем, что топологическая группа $G$ неметризуема, а ее единица имеет тип $G_\delta$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Группа $G$ минимальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ослабим топологию группы $G$, которую обозначим через $\mathcal{T}$, до отделимой групповой топологии $\mathfrak{S}$. Минимальность группы $(G, \mathcal{T})$ немедленно вытекает из утверждений А и Б, доказываемых ниже.

А. $\mathfrak{S}|_C = \mathcal{T}|_C$. В силу определения топологии $\mathcal{T}|_C$, как топологии поточечной сходимости, достаточно показать, что для каждого $x \in X$ отображение вычисления $\delta_x: C \to GF(q)$, определяемое правилом $f \mapsto f(x)$, $\mathfrak{S}$-непрерывно. Функционал $\delta_x$ удовлетворяет условиям предложения 1. Поэтому $\theta[\delta_x] \in A$ и ядро $\ker \delta_x = \{f \in C: f(x) = 0\}$ $\mathfrak{S}$-замкнуто в $C$, являясь пересечением $C$ и ($\mathfrak{S}$-замкнутого в $G$) множества неподвижных точек внутреннего автоморфизма группы $G$, производимого элементом $\theta[\delta_x] \in A$ (действительно, если $f \in C$, то $\theta[\delta_x] f \theta[\delta_x]^{-1} = \theta[\delta_x](f) = f + \overline{f(x)}$). Поэтому (конечная) топологическая фактор-группа $(C, \mathfrak{S}|_C)/\ker \delta_x$ отделима и вынужденно дискретна, что влечет непрерывность отображения $\delta_x$.

Б. *Подгруппа $C$ $\mathfrak{S}$-открыта в $G$.* Из согласованности топологии $\mathfrak{S}$ с групповой структурой следует, что отображение $G \times C \to C$, задаваемое правилом $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$, $\mathfrak{S}$-непрерывно. Пусть для каждого элемента $f \in C$ и конечного набора $x_1, \dots, x_n \in X$ $U(f; x_1 \dots, x_n) = \{g \in C: \forall i \in \{1, \dots n\}$ $f(x_i) = g(x_i)\}$ — стандартная открытая окрестность элемента $f$ в $C$. Фиксируем $x_0 \in X$. Найдутся элементы $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\mathfrak{S}$-открытая окрестность $V$ единицы в $G$, для которых $gfg^{-1} \in U(\overline{0}; x_0)$, как только $g \in V$ и $f \in U(\overline{0}; x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\pi: G \to A$ — канонический гомоморфизм. Группа $C$ абелева, поэтому для каждых $y \in G$ и $f \in C: yfy^{-1} = \pi(y) f \pi(y)^{-1}$. Очевидно, если $y \in \pi(V)$ и $y = \theta[\varphi]$, то носитель $\operatorname{supp}\varphi$ функционала $\varphi$ лежит во множестве $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Для каждого $i = 0, 1 \dots, n$ отыщем отображение $f_i \in C$, для которого $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = 0, 1, \dots, n$. Фиксируем открытую окрестность единицы $W$ в $G$, лежащую в $V$ и такую, что при каждом $i = 0, 1, \dots, n$ и каждом $y \in W: yf_iy^{-1} \in U(f_i; x_0, \dots, x_n)$. Если теперь $y \in W$, $\pi(y) = \theta[\varphi]$, то при всех $i = 0, 1, \dots, n$: $\varphi(f_i) = 0$. Поскольку $W \subset V$, то $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x_0, \dots, x_n\}$ и $\varphi = \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{x_i}$, где все $\lambda_i \in GF(q)$. Таким образом, все $\lambda_i = 0$, т. е. $\varphi$ — нулевой функционал и $\pi(W) = \{e\}$, где $e$ — единица группы $A$. Это означает, что $W \subset \pi^{-1}(\{e\}) = C$ и группа $C$ $\mathfrak{S}$-открыта в $G$, обладая непустой $\mathfrak{S}$-внутренностью (см.[6]).


1. *Stephenson R. M.* Minimal topological groups.— Math. Ann., 1971, 192, N 3, p. 193—195.
2. *Архангельский А. В.* Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения.— Докл. АН СССР, 1979, 247, № 4, с. 779—782.
3. *Архангельский А. В.* О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств.— Успехи мат. наук, 1980, 35, вып. 3, с. 3—22.
4. *Архангельский А. В.* Классы топологических групп.— Там же, 1981, 35, вып. 3, с. 127—146.
5. *Пестов В. Г.* О вложениях и уплотнениях топологических групп.— Мат. заметки, 1982, 31, № 3, с. 443—446.
6. *Хьюитт Э., Росс К. А.* Абстрактный гармонический анализ : В 2-х т.— М.: Наука, 1975.— Т. 1. 656 с.


Томск. ун-т

Получено 22.02.85