УДК 517.9

А. М. Самойленко, М. Я. Свищук

О расщеплении системы дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора

Рассматривается система

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, y, \varepsilon), \quad dy/dt = \mathcal{P}(\varphi, y, \varepsilon)\, y, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — соответственно циклические и нормальные координаты. Векторная и матричная функции $a(\varphi, y, \varepsilon)$ и $\mathcal{P}(\varphi, y, \varepsilon)$ определены в некоторой области $\mathcal{D}$, достаточно гладкие в этой области и имеют период 2π по каждому из переменных φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, ε — малый параметр.

Класс систем, приводящихся к виду (1), довольно широк. В частности, неоднородная система

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, y, \varepsilon), \quad dy/dt = \mathcal{P}(\varphi, y, \varepsilon)\, y + c(\varphi, \varepsilon) \tag{2}$$

в окрестности гладкого инвариантного тора $y = u(\varphi, \varepsilon)$ представима в виде (1) (см. [3]).

Положим $a(\varphi, 0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} a_0(\varphi, \varepsilon)$ и рассмотрим наряду с системой (1) систему

$$d\theta/dt = \varepsilon a_0(\theta, \varepsilon), \quad dy/dt = Q(\theta, y, \varepsilon)\, y, \tag{3}$$

которую будем называть расщепленной по отношению к системе (1). Предположив, что система (1) имеет в области $\mathscr{D}$ асимптотически устойчивый инвариантный тор $y = 0$, приведем (1) гладкой деформацией координат к расщепленному виду (3).

Вопросы приводимости динамических систем к каноническому виду рассматривались в работах [1, 4] (в [1] правые части системы (3) предполагаются постоянными, в [4] второе уравнение системы (3) линеаризуется).

В настоящей работе выясняется вопрос о приводимости систем дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой вида (1) к расщепленному виду (3) (второе уравнение (3) не является линейным по y) в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что выполняются условия:*

1) *функции* $a(\varphi, y, \varepsilon)$, $\mathscr{P}(\varphi, y, \varepsilon)$ *определены в некоторой области* $\mathscr{D} = \{\varphi \geqslant 0,\ \|y\| \leqslant d,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, *периодические по* φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, *с периодом* 2π *и трижды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных;*

2) $y = 0$ — *асимптотически устойчивый инвариантный тор системы* (1), *принадлежащий области* $\mathscr{D}$ *вместе с некоторой своей* ρ-*окрестностью;*

3) *матрица* $Q(\theta, 0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} Q_0(\theta, \varepsilon)$ *такая, что найдутся положительные постоянные* $k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2$, *обеспечивающие неравенства*

$$\|\Omega_0^\tau(Q_0)\| \leqslant k_1 \exp(-\gamma_1\tau), \quad \|\partial\Omega_0^\tau(Q_0)/\partial\theta_j\| \leqslant k_2 \exp(-\gamma_2\tau), \ \tau \geqslant 0,$$
$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{4}$$

Тогда существует непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция $\Phi(\theta, y, \varepsilon)$, *определенная при* $\theta \geqslant 0$, $\|y\| \leqslant d_0 \leqslant d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *имеющая период* 2π *по* θ *и удовлетворяющая условию* $\Phi(\theta, 0, \varepsilon) = 0$ *такая, что система* (1) *заменой переменных*

$$\varphi = \theta + \Phi(\theta, y, \varepsilon) \tag{5}$$

приводится к виду (3).

Доказательство. Из равенств (1) и (3) вытекает, что для существования преобразования (5) необходимо, чтобы функция $\Phi(\theta, y, \varepsilon)$ была периодическим с периодом 2π решением уравнения в частных производных

$$\varepsilon\partial\Phi/\partial\theta a_0(\theta, \varepsilon) + \partial\Phi/\partial y Q(\theta, y, \varepsilon)\, y = \varepsilon(a(\theta + \Phi, y, \varepsilon) - a_0(\theta, \varepsilon)), \tag{6}$$

удовлетворяющим условию

$$\Phi(\theta, y, \varepsilon)\,|_{y=0} = 0. \tag{7}$$

Чтобы решить задачу (6), (7), воспользуемся приемом, предложенным в [4]. Положим $\Phi = \Phi_0 y$. Тогда условие (7) выполняется автоматически, а равенство (6) с учетом представления

$$a(\theta + \Phi, y, \varepsilon) - a_0(\theta, \varepsilon) = \int_0^1 \partial a(\theta + \Phi_0\tau y, \tau y, \varepsilon)/\partial(\tau y)\, d(\tau y) \stackrel{\text{def}}{=} A(\theta, y, \Phi_0, \varepsilon)\, y$$

принимает вид

$$\varepsilon\partial\Phi_0/\partial\theta a_0 + \partial\Phi_0/\partial y\, Qy + \Phi_0 Q = \varepsilon A(\theta, y, \Phi_0, \varepsilon)\, y. \tag{8}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в § 1 [4], убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\Phi_0(\theta, 0, \varepsilon) = \Phi_0(\theta, \varepsilon) = \partial\Phi(\theta, 0, \varepsilon)/\partial y, \quad A(\theta, 0, \Phi_0, \varepsilon) = \partial a_0/\partial\theta\Phi_0 + \partial a(\theta,0,\varepsilon)/\partial y. \tag{9}$$

Учитывая равенства (9), представим уравнение (8) в виде

$$\varepsilon\partial\Phi_0/\partial\theta a_0 + \partial\Phi_0/\partial y Qy + \Phi_0 Q - \varepsilon\partial a_0/\partial\theta\Phi_0 = \varepsilon(\partial a(\theta, 0, \varepsilon)/\partial y + A'), \tag{10}$$

где $A' = A'(\theta, y, \Phi_0, \varepsilon) = A(\theta, y, \Phi_0, \varepsilon) - A(\theta, 0, \Phi_0, \varepsilon)$.

Для нахождения решения уравнения (10) применим итерационный процесс, задающийся равенствами

$$\begin{gathered}\varepsilon\partial\Phi_0^0/\partial\theta a_0 + \partial\Phi_0^0/\partial y Q_0 y + \Phi_0^0 Q_0 - \varepsilon\partial a_0/\partial\theta\Phi_0^0 = \varepsilon\partial a(\theta, 0, \varepsilon)/dy,\\ \varepsilon\partial\Phi_0^{k+1}/\partial\theta a_0 + \partial\Phi_0^{k+1}/\partial y Q_0 y + \Phi_0^{k+1} Q_0 - \varepsilon\partial a_0/\partial\theta\Phi_0^{k+1} = \varepsilon(\partial a(\theta, 0, \varepsilon)/dy + \\ + A'(\theta, y, \Phi_0^k, \varepsilon)).\end{gathered} \tag{11}$$

Функции Φ_0^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, будем рассматривать в пространстве $C(\|y\| \leqslant d)$ матричных функций переменных θ, y, определенных при $\theta \geqslant 0$, $\|y\| \leqslant d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, периодических по θ с периодом 2π, непрерывных по совокупности переменных. Норма в пространстве $C(\|y\| \leqslant d)$ определяется равенством

$$\|\Phi_0^k(\theta, y, \varepsilon)\|_0 = \max\Big(\sum_{j,p}(\Phi_0^k(\theta, y, \varepsilon))_{jp}^2\Big)^{1/2} \quad j, p = 1, 2, \ldots n,$$

$C^1(\|y\| \leqslant d)$ — подпространство $C(\|y\| \leqslant d)$, состоящее из непрерывно дифференцируемых в области $\|y\| \leqslant d$ матричных функций с нормой $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_0 + \max\limits_{\alpha=\overline{1,m+n}} \|\partial/\partial z_\alpha\|_0$, где $z = (\theta, y)$.

Пусть $\theta_t = \theta_t(\theta, \varepsilon)$ — решение первого уравнения (3). Обозначим через $\Omega_\tau^t(B) = \Omega_\tau^t(B, \theta, \varepsilon)$ фундаментальную матрицу решений линейной системы $dy/dt = B(\theta_t)y$ (B — одна из матриц $Q(\theta, \varepsilon)$ и $\varepsilon\partial a_0/\partial\theta$). В силу предположения 2 доказываемой теоремы справедливы следующие соотношения:

$$\|\Omega_0^t(Q_0)\| \leqslant c_1, \quad c_1 = \text{const} > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty}\|y_t - \Omega_0^t(Q_0)y\| = 0. \tag{13}$$

Здесь $y_t = y_t(\theta, y, \varepsilon)$, $y_0 = y$ — решение нелинейного матричного уравнения

$$dy/dt = Q(\theta_t, y, \varepsilon)y. \tag{14}$$

Во избежание сложностей технического характера будем считать, что $y_t(\theta, y, \varepsilon)$ не выходит из рассматриваемой области для всех $t \geqslant 0$.

Пусть выполняется условие

$$\lim_{t\to\infty}\|\Omega_t^0(\varepsilon\partial a_0/\partial\theta)\| \cdot \|\Omega_0^t(Q_0)\| = 0 \tag{15}$$

равномерно относительно θ. Тогда предельным переходом при $t \to \infty$ с учетом равенства (13) получим

$$\begin{gathered}\Phi_0^0(\theta, y, \varepsilon) = -\int_0^\infty \Omega_\tau^0(\varepsilon\partial a_0/\partial\theta)\,\partial a(\theta_\tau, 0, \varepsilon)/\partial y\,\Omega_0^\tau(Q_0)\,d\tau,\\ \Phi_0^{k+1}(\theta, y, \varepsilon) = -\int_0^\infty \Omega_\tau^0(\varepsilon\partial a_0/\partial\theta)[\partial a(\theta_\tau, 0, \varepsilon)/\partial y + A'(\theta_\tau, y_\tau, \Phi_0^k, \varepsilon)[\,\Omega_0^\tau(Q_0)\,d\tau.\end{gathered} \tag{16}$$

Для того чтобы соотношения (15) определяли периодические по θ с периодом 2π непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных матричные функции Φ_0^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, необходимо выполнение следующих неравенств (см. § 3 [4]):

$$\int_0^\infty \|\Omega_\tau^0(\varepsilon\partial a_0/\partial\theta)\| \cdot \|\Omega_0^\tau(Q_0)\|\,d\tau \leqslant \overline{\gamma}_1,$$

$$\int_0^\infty \| \partial\Omega_\tau^0 (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta)/\partial\theta_j \| \cdot \| \Omega_0^\tau (Q_0) \| \, d\tau \leqslant \bar{\gamma}_2,$$

$$\int_0^\infty \| \Omega_\tau^0 (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \| \cdot \|\partial\Omega_0^\tau (Q_0)/\partial\theta_j \| \, d\tau \leqslant \bar{\gamma}_3, \tag{17}$$

$$\int_0^\infty \| \Omega_\tau^0 (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \| \cdot \| \Omega_0^\tau (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \| \cdot \| \Omega_0^\tau (Q_0) \| \, d\tau \leqslant \bar{\gamma}_4, \ j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\bar{\gamma}_i = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Предположим, что для функций $\partial a_0/\partial\theta$, $\partial a(\theta, 0, \varepsilon)/\partial y$, $Q_0(\theta, \varepsilon)$ и $A'(\theta, y, \Phi_0^k, \varepsilon)$ в области $\theta \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d$ справедливо соотношение

$$\max \{\| \partial a_0/\partial\theta \|_1, \ \| \partial a(\theta, 0, \varepsilon)/\partial y \|_1, \ \| Q_0(\theta, \varepsilon) \|_1, \quad \| \partial A'(\theta, y, \Phi_0^k, \varepsilon)/\partial y_i \|\} \leqslant c_2,$$
$$c_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{18}$$

Тогда матриканты, фигурирующие в неравенствах (17), оцениваются следующим образом:

$$\| \Omega_\tau^t (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \|_1 \leqslant \beta \exp(-\varepsilon\nu(\varepsilon) | t - \tau |), \quad \nu(\varepsilon) > 0, \quad \nu(\varepsilon) \to c_2 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$
$$\beta = \mathrm{const} > 0. \tag{19}$$

Следовательно, условия (17) выполняются, лишь только

$$\| \Omega_0^\tau (Q_0) \| \leqslant k_1 \exp(-\gamma_1\tau), \qquad \| \partial\Omega_0^\tau (Q_0)/\partial\theta_j \| \leqslant k_2 \exp(-\gamma_2\tau), \tag{20}$$

где $k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2 = \mathrm{const} > 0$, для всех $\tau \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d$ $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Постоянные M и d зафиксируем таким образом, чтобы для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялась оценка

$$\| \Phi_0^k (\theta, y, \varepsilon) \| \leqslant M, \quad M = \mathrm{const} > 0. \tag{21}$$

Найденная последовательность функций Φ_0^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет уравнениям (11). Действительно, заменив в формулах (16) переменные θ, y на θ_t, y_t, с учетом свойства матриканта линейной системы и соотношения (13) получим

$$\Phi_0^0 (\theta_t, y_t, \varepsilon) = -\int_t^\infty \Omega_\tau^t (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \, \partial a(\theta_\tau, 0, \varepsilon)/\partial y \Omega_t^\tau (Q_0) \, d\tau,$$

$$\Phi_0^{k+1} (\theta_t, y_t, \varepsilon) = -\int_t^\infty \Omega_\tau^t (\varepsilon\partial a_0/\partial\theta) \, [\partial a(\theta_\tau, 0, \varepsilon)/\partial y + A'(\theta_\tau, y_\tau, \Phi_0^k, \varepsilon)] \, \Omega_t^\tau(Q_0) \, d\tau. \tag{22}$$

Вследствие выполнения неравенств (20) интегралы (22) равномерно сходятся и представляют собой непрерывно дифференцируемые по t функции. Дифференцируя равенства (22) по t и учитывая, что

$$d\Phi_0^k (\theta_t, y_t, \varepsilon)/dt = \varepsilon\partial\Phi_0^k (\theta_t, y_t, \varepsilon)/\partial\theta_t a_0(\theta_t, \varepsilon) + \partial\Phi_0^k (\theta_t, y_t, \varepsilon)/\partial y_t Q(\theta_t, y_t, \varepsilon) \, y_t \tag{23}$$

для всех $\theta \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d$, при $t = 0$ получаем равенства (11).

Докажем справедливость следующих оценок:

$$\| \Phi_0^{k+1} - \Phi_0^k \|_0 \leqslant m \, \| A'(\theta, y, \Phi_0^k \varepsilon) - A'(\theta, y, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon) \|_0,$$

$$\| \Phi_0^{k+1} - \Phi_0^k \|_1 \leqslant m_1 \, \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|_0 + m_2 \alpha(d) \, \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|_1, \tag{24}$$

где $m, m_1, m_2 = \mathrm{const} > 0$, $\alpha(d) \to 0$ при $d \to 0$.

Первое неравенство (24) следует из представлений (11) и оценок (20). Справедливость второго неравенства вытекает из оценки

$$\| \partial (\Phi_0^{k+1}(z, \varepsilon) - \Phi_0^k(z, \varepsilon))/\partial z_j \| \leqslant (\bar\gamma_2 + \bar\gamma_3) \| A'(z, \Phi_0^k, \varepsilon) - A'(z, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon) \|_0 +$$

$$+ \int_0^\infty \Bigg| \| \Omega_\tau^0 (\varepsilon \partial a_0/\partial\theta) \| \sum_{\nu=1}^{m+n} [\| \partial (A'(z_\tau, \Phi_0^k, \varepsilon) - A'(z_\tau, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon))/\partial z_{\tau\nu} \| +$$

$$+ \| \partial A'(z_\tau, \Phi_0^k, \varepsilon)/\partial \Phi_0^k \cdot \partial \Phi_0^k (z_\tau, \varepsilon)/\partial z_{\tau\nu} - \partial A'(z_\tau, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon)/\partial \Phi_0^{k-1} \cdot \partial \Phi_0^{k-1}/\partial z_{\tau\nu} \|] \times$$

$$\times \| \partial z_{\tau\nu}/\partial z_j \| \cdot \| \Omega_0^\tau (Q_0) \| \Bigg] d\tau \leqslant (\varepsilon \bar\gamma_2 + N c_4 \bar\gamma_4 + N c_1 \bar\gamma_1 c_4 + c_5 M) \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|_0 +$$

$$+ (\varepsilon \bar\gamma_3 + c_3(d) + N c_1 d \bar\gamma_3 \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \| + c_3(d) \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|_1,$$

где N — положительная постоянная, зависящая лишь от m и n, $z = (\theta, y)$, $j = \overline{1, m+n}$. Положительные постоянные $c_3(d), c_4, c_5$ введены так, чтобы

$$\max \{ \| A'(\theta, y, \Phi_0^k, \varepsilon) \|, \| DA'(\theta, y, \Phi_0^k, \varepsilon) \| \} \leqslant c_3(d),$$

$$\| \partial A'(z, \Phi_0^k, \varepsilon)/\partial z_j - \partial A'(z, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon)/\partial z_j \| \leqslant c_4 \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|,$$

$$\| \partial A'(z, \Phi_0^k, \varepsilon)/\partial \Phi_0^k - \partial A'(z, \Phi_0^{k-1}, \varepsilon)/\partial \Phi_0^{k-1} \| \leqslant c_5 \| \Phi_0^k - \Phi_0^{k-1} \|.$$

Здесь $c_3(d) \to 0$ при $d \to 0$, через D обозначен оператор дифференцирования по любой из переменных θ, Φ_0^k.

Таким образом, условия теоремы 2 [4] выполнены. Согласно этой теореме можно указать такое d_0, $0 < d_0 \leqslant d$, чтобы матричное уравнение (10) имело непрерывно дифференцируемое при $\| y \| \leqslant d_0$ периодическое по θ с периодом 2π решение $\Phi_0(\theta, y, \varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Следовательно, в области $\| y \| \leqslant d_0$ существует решение задачи (6), (7) для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\theta \geqslant 0$, что и доказывает существование искомого преобразования (5).

Рассмотрим некоторые коэффициентные критерии выполнения неравенств (20).

1. Пусть матрица $\mathcal{P}(\varphi, y, \varepsilon) = \mathcal{P} = \mathrm{const}$. Тогда $\Omega_0^\tau(\mathcal{P}) = \exp(\mathcal{P}\tau)$, $\tau \geqslant 0$ и неравенства (20) выполняются, если только вещественные части всех характеристических чисел матрицы $\mathcal{P}$ отрицательные.

Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 2. *Рассмотрим систему*

$$d\varphi/dt = \varepsilon a(\varphi, y, \varepsilon), \quad dy/dt = \mathcal{P} y. \tag{25}$$

Предположим, что выполняются условия:

1) *функция $a(\varphi, y, \varepsilon)$ определена в области $\varphi \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, трижды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных, периодическая по φ с периодом 2π;*

2) *характеристические числа матрицы $\mathcal{P}$ имеют отрицательные вещественные части.*

Тогда существует непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция $\Phi(\theta, y, \varepsilon)$, определенная в области $\theta \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d_0 \leqslant d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, периодическая по θ с периодом 2π, удовлетворяющая условию $\Phi(\theta, 0, \varepsilon) = 0$, такая, что система (25) заменой переменных $\varphi = \theta + \Phi(\theta, y, \varepsilon)$ приводится к расщепленному виду

$$d\theta/dt = \varepsilon a_0(\theta, \varepsilon), \qquad dy/dt = \mathcal{P} y. \tag{26}$$

2. Рассмотрим систему (1) общего вида. Для проверки условий теоремы 1 воспользуемся неравенством Важевского. Положим $\beta^0(\theta, \varepsilon)$ равным наибольшему из собственных чисел матрицы $1/2 [\mathcal{P}, (\theta, 0, \varepsilon) + \mathcal{P}^*(\theta, 0, \varepsilon)]$, где звездочка — знак сопряжения матрицы. Рассуждения, аналогичные приведенным в §2 [2], приводят к оценкам

$$\| \Omega_0^\tau (Q_0) \| \leqslant N \exp \left(\int_0^\tau \beta^0(\theta_t, \varepsilon) \, dt \right), \qquad \| \partial \Omega_0^\tau (Q_0)/\partial \theta_j \| \leqslant$$

$$\leqslant N\tau \exp \left(\int_0^\tau (\beta^0(\theta_t, \varepsilon) + \varepsilon c_2 t) \, dt \right), \quad t \geqslant 0.$$

Следовательно, неравенства (20) удовлетворяются, если только существует положительная постоянная b такая, что $\beta^0(\theta, \varepsilon) \leqslant -b < 0$ для всех $\theta \geqslant 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что правые части системы* (1) *определены в некоторой области* $\theta \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *трижды непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных, периодические по* θ *с периодом* 2π. *Матричная функция* $\mathcal{P}(\varphi, y, \varepsilon)$ *такая, что функция* $\beta^0(\theta, \varepsilon)$, *равная наибольшему из собственных чисел матрицы* $1/2\,[\mathcal{P}(\theta, 0, \varepsilon) + \mathcal{P}^*(\theta, 0, \varepsilon)]$, *принимает отрицательные значения для всех* $\theta \geqslant 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. *Тогда можно указать* d_0: $0 < d_0 \leqslant d$ *и такую непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных периодическую по* θ *с периодом* 2π *функцию* $\Phi(\theta, y, \varepsilon)$, *определенную в области* $\theta \geqslant 0$, $\| y \| \leqslant d_0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *удовлетворяющую условию* $\Phi(\theta, 0, \varepsilon) = 0$, *что система* (1) *заменой переменных* (5) *приводится к расщепленному виду* (3).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 245 с.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, № 34, с. 1219—1241.
3. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 5, с. 820—834.
4. *Самойленко А. М.* О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1972, № 36, с. 209—233.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.— М.: Мир, 1977.— 353 с.

Киев. ун-т

Получено 02.04.85