УДК 511.336

И. В. Решетуха

О произведении, родственном кубической гауссовой сумме

1. Основные обозначения и определения. В работе приняты такие обозначения: $p \in \mathbb{N}$ — простое число вида $3m+1$; $\rho = e^{2\pi i/3}$ — кубический корень из 1; ω — простой делитель p в $\mathbb{Z}[\rho]$, нормированный условиями

$$\omega \equiv -1 \pmod 3), \ \operatorname{Im}\omega > 0; \tag{1}$$

Q_p — поле классов вычетов по mod p; χ — кубический характер на $\mathbb{Z}$, удовлетворяющий обобщенному критерию Эйлера: $\chi(r) \equiv r^m \pmod\omega$, $r \in \mathbb{Z}$, $m = (p-1)/3$; $\zeta = e^{2\pi i/p}$ — корень p-й степени из 1; $\tau(\chi;\zeta)$ — гауссова сумма характера χ, определяемая равенством

$$\tau(\chi;\zeta) = \sum_{r \bmod p} \chi(r)\,\xi^r; \tag{2}$$

$G_p = \{r \in Q_p \mid r \neq 0\}$ — мультипликативная группа классов вычетов по mod p; f — корень сравнения $X^3 \equiv 1 \pmod p$, для которого выполняется условие

$$f \equiv \rho \pmod\omega; \tag{3}$$

σ — треть-система элементов из G_p, т. е. множество, содержащееся в G_p, для которого $\{\sigma, f\sigma, f^2\sigma\} = G_p$; $\delta(\chi;\zeta;\sigma) = \prod_{r\in\sigma} (\zeta^r + \rho\zeta^{rf} + \rho^2\zeta^{rf^2})$ — произведение, называемое родственным гауссовой сумме (2) ввиду соотношений [1, 2] $\delta(\chi;\zeta;\sigma) = \alpha\tau(\chi;\zeta)$, $\alpha \in \mathbb{Z}[\rho]$ и

$$\delta(\chi;\zeta;\sigma)^3 = \prod_{r\in G_p} (\zeta^r + \rho\zeta^{rf} + \rho^2\zeta^{rf^2}) = p\Omega, \quad \Omega = \alpha^3\omega. \tag{4}$$

В работе [1] высказана гипотеза, согласно которой для ω и f, нормированными соответственно (1) и (3), число Ω лежит в верхней комплексной полуплоскости. Эта гипотеза примыкает к проблеме Куммера, суть которой излагается в [3—5].

Локстон [6] проводил исследования по упомянутой гипотезе с применением интерполяционного метода суммирования и получил результат, который хоть и не доказывает гипотезу, однако свидетельствует в ее пользу.

В работе [2] изучались некоторые функции, являющиеся кубическими аналогами тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$. В п. 2 предлагаемой работы с применением этих функций найдем явное выражение для Ω, из которого следует кубический закон взаимности [7] для модулей ω, $\overline{\omega}$. Кроме того, это выражение позволило обнаружить (и затем экспериментально проверить) более сильную закономерность расположения числа Ω в комплексной плоскости. При изучении этого вопроса привлекается метод А. Н. Тихонова решения некорректно поставленных задач, изложение которого имеется в [8].

2. Тригонометрическое доказательство кубического закона взаимности. Определим на $\mathbb{C}$ синус кубический [2] равенством

$$\operatorname{sc}(z) = e^{2\pi i \operatorname{tr} z} + \rho e^{2\pi i \operatorname{tr} \rho^2 z} + \rho^2 e^{2\pi i \operatorname{tr} \rho z} \tag{5}$$

и для модуля $\omega^* = -\overline{\omega}$ рассмотрим функции

$$F(z) = \prod_{s=0}^{p-1} \operatorname{sc}(z + s/\omega^*), \quad \varphi(z) = F(z)/\operatorname{sc}(z). \tag{6}$$

Справедливо равенство

$$\varphi(0) = p\Omega. \tag{7}$$

Действительно, $\varphi(0) = \prod_{s=1}^{p-1} \mathrm{sc}\,(s/\omega^*)$. Для множителей этого произведения имеем $\mathrm{sc}\,(s/\omega^*) = \zeta^{-sa_0} + \rho\zeta^{-sa_2} + \rho^2\zeta^{-sa_1}$, где

$$a_j = \mathrm{tr}\,\rho^j\omega, \quad j = 0, 1, 2. \tag{8}$$

С применением (3) и сравнения $\bar{\omega} \equiv a_0 \,(\mathrm{mod}\,\omega)$ убеждаемся в справедливости соотношений

$$a_1 \equiv a_0 f^2, \quad a_2 \equiv a_0 f \quad (\mathrm{mod}\, p). \tag{9}$$

Следовательно, $\varphi(0) = \prod_{s\in G_p} (\zeta^{-sa_0} + \rho\zeta^{-sa_0 f} + \rho^2\zeta^{-sa_0 f^2})$. Это произведение с помощью подстановки $r = -sa_0$ приводится к виду (4) и равенство (7) справедливо.

Пусть $\psi_p(r)$ — арифметическая функция, значение которой в $r \in \mathbb{Z}$ есть вычет числа r, принадлежащий интервалу $[0, p)$. Определим множества $K, K_0 \subset K$ и $\Lambda_0 \backsim K_0$ равенствами

$$K = \{(k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3 \mid k_0 \in \mathbb{N}, \quad k_0 \in (0, p), \quad k_1 = \psi_p(k_0 f), \quad k_2 = \psi_p(k_0 f^2)\}, \tag{10}$$

$$K_0 = \{(k_0, k_1, k_2) \in K \mid k_0 + k_1\rho^2 + k_2\rho \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)\}, \tag{11}$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{Z}[\rho] \mid \lambda = k_0 + k_1\rho^2 + k_2\rho, (k_0, k_1, k_2) \in K_0\}. \tag{12}$$

Для любого $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ эти множества непустые: используя (8), (9), легко проверить, что $\omega^* = -\bar{\omega} = k_0^* + k_1^*\rho^2 + k_2^*\rho \in \Lambda_0$, где $k_0^* = (p - a_0)/3$, $k_1^* = (p - a_2)/3$, $k_2^* = (p - a_1)/3$, $(k_0^*, k_1^*, k_2) \in K_0$. С использованием (3), (10)—(12) убеждаемся, что

$$\forall \lambda \in \Lambda_0 : \lambda \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \omega^*). \tag{13}$$

Лемма 1. *Функция $F(z)$ имеет разложение*

$$F(z) = \mathrm{sc}\,(pz) + \sum_{\lambda\in\Lambda_0} d(\lambda)\,\mathrm{sc}\,(\lambda z), \tag{14}$$

в котором коэффициенты $d(\lambda)$ целые и с учетом определений (10)—(12) *для них справедливы равенства*

$$d(\lambda) = d(k_0, k_1, k_2) = \frac{1}{p-1}\left(t_0(k_0, k_1, k_2)\,p^2 - t(k_0, k_1, k_2)\right), \tag{15}$$

где $t(k_0, k_1, k_2) = \dfrac{p!}{k_0!\,k_1!\,k_2!}$ — количество троек множеств $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, подающих Q_p и содержащих соответственно по k_0, k_1, k_2 элементов, $t_0(k_0, k_1, k_2)$ — количество таких троек, для которых

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_j} \gamma = 0, \quad j = 0, 1, 2. \tag{16}$$

Доказательство. С применением (3), (8), (9) функцию $F(z)$ приводим к виду

$$F(z) = \prod_{\gamma\in Q_p} (\zeta^{\gamma} e^{2\pi i \mathrm{tr} z} + \rho\zeta^{\gamma f} e^{2\pi i \mathrm{tr} \rho^2 z} + \rho\zeta^{\gamma f^2} e^{2\pi i \mathrm{tr}\, \rho z}).$$

Выполнив в правой части все перемножения, получим

$$F(z) = \sum_{\substack{\lambda = k_0 + k_1\rho^2 + k_2\rho \\ k_0 + k_1 + k_2 = p}} \rho^{k_1 + 2k_2} d(\lambda)\, e^{2\pi i \mathrm{tr} \lambda z}, \tag{17}$$

где коэффициенты $d(\lambda)$ представляются в виде суммы

$$d(\lambda) = d(k_0, k_1, k_2) = \sum_{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2} \zeta^{\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma + f\sum_{\gamma\in\Gamma_1}\gamma + f^2\sum_{\gamma\in\Gamma_2}\gamma},$$

распространяющейся на все тройки множеств Γ_0, Γ_1, Γ_2, подающих Q_p и содержащих по k_0, k_1, k_2 элементов. Коэффициенты $d(\lambda)$ являются целыми поля $Q(\zeta)$. Они не меняются при автоморфизмах $\zeta \leftarrow \zeta^r$, $r = 1, \ldots, p-1$, поля $Q(\zeta)$ относительно поля Q. Следовательно, $d(\lambda) \in \mathbb{Z}$. В силу того, что $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-1}$ составляют фундаментальный базис кольца всех целых поля $Q(\zeta)$ и $\zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{p-1} = -1$, количество троек Γ_0, Γ_1, Γ_2, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma + f\sum_{\gamma\in\Gamma_1}\gamma + f^2\sum_{\gamma\in\Gamma_2}\gamma = r, \tag{18}$$

будет одинаково для различных $r \neq 0$. Поэтому

$$d(\lambda) = \hat{t}(\lambda) + \frac{t(\lambda) - \hat{t}(\lambda)}{p-1}(\zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{p-1}) = \frac{p\hat{t}(\lambda) - t(\lambda)}{p-1}, \tag{19}$$

где $\hat{t}(\lambda)$ — количество троек $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma + f\sum_{\gamma\in\Gamma_1}\gamma + f^2\sum_{\gamma\in\Gamma_2}\gamma = 0. \tag{20}$$

Равенство (19) показывает, что

$$d(\lambda) = 1 \text{ при } \lambda = p, \rho^2 p, \rho p. \tag{21}$$

Убедимся, что

$$d(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda = k_0 + k_1\rho^2 + k_2\rho \not\equiv 0 \pmod{\omega^*}. \tag{22}$$

Действительно, если имеем тройку Γ_0, Γ_1, Γ_2, удовлетворяющую (20), то прибавляя к каждому элементу этих множеств единицу, получаем новую тройку, для которой выполняется условие (18) при

$$r = k_0 + k_1 f + k_2 f^2 \neq 0. \tag{23}$$

И наоборот, если имеем тройку множеств, удовлетворяющую (18), (23), то вычитая единицу из всех элементов этих множеств, получаем тройку, удовлетворяющую условию (20). Следовательно, троек множеств, удовлетворяющих (20), имеется столько же, сколько и троек, удовлетворяющих (18), (23), или (18) при $r \neq 0$. Таким образом, $\hat{t}(\lambda) = t(\lambda)/p$ и в силу (19) $d(\lambda) = 0$.

Пусть $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ — тройка множеств с

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma = s_0, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_1}\gamma = s_1, \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_2}\gamma = s_2. \tag{24}$$

С использованием в Q_p равенств $1 + f + f^2 = 0$, $s_0 + s_1 + s_2 = 0$ убеждаемся, что для того, чтобы тройка Γ_0, Γ_1, Γ_2 удовлетворяла условию (20), необходимо и достаточно, чтобы

$$s_1 = s_0 f, \qquad s_2 = s_0 f^2. \tag{25}$$

Таким образом, все тройки Γ_0, Γ_1, Γ_2, удовлетворяющие (20), разбиваются на p классов в зависимости от s_0. Если $s_0 = 0$, то в силу (25) $s_0 = s_1 = s_2 = 0$ и имеем класс троек, удовлетворяющих (16). Пусть $t_0(\lambda)$ — количество троек этого класса. Убедимся, что при любом $s_0 \neq 0$ соответствующий класс содержит тоже $t_0(\lambda)$ троек Γ_0, Γ_1, Γ_2, удовлетворяющих (20). Действительно, прибавляя ко всем элементам множеств Γ_0, Γ_1, Γ_2 элемент $-s_0/k_0$, получаем тройку множеств, удовлетворяющую (16). И наоборот, прибавляя к элементам тройки множеств Γ_0, Γ_1, Γ_2, удовлетворяющей (16), элемент s_0/k_0, находим тройку множеств, для которой выполняются (20) и (24). Следовательно, между этими классами существует взаимно-однозначное соответствие и они содержат одинаковое число троек. Полагая в (19) $\hat{t}(\lambda) = pt_0(\lambda)$, имеем равенство (15).

Равенство (15) показывает, что

$$d(\lambda) \equiv 0 \pmod{p}, \quad d(\lambda) = d(\rho\lambda) = d(\rho^2\lambda). \tag{26}$$

Для окончательного доказательства леммы проверкой всевозможных случаев убеждаемся, что числа λ вида $\lambda = k_0 + k_1\rho^2 + k_2\rho$ с $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_0 + k_1 + k_2 = p$ удовлетворяют сравнениям: $\lambda \equiv 1$, или ρ, или $\rho^2 \pmod 3$ и

$$k_0 - 1 \equiv k_1 \equiv k_2, \quad k_1 + 2k_2 \equiv 0 \pmod 3), \text{ если } \lambda \equiv 1 \pmod 3), \tag{27}$$

$$k_0 \equiv k_1 \equiv k_2 - 1, \quad k_1 + 2k_2 \equiv 2 \pmod 3), \text{ если } \lambda \equiv \rho \pmod 3), \tag{28}$$

$$k_0 \equiv k_1 - 1 \equiv k_2, \quad k_1 + 2k_2 \equiv 1 \pmod 3), \text{ если } \lambda \equiv \rho^2 \pmod 3). \tag{29}$$

С использованием множества Λ_0 сумма (17) переходит в сумму (14) в силу определения (5) и соотношений (21), (22), (26)—(29). Лемма 1 доказана.

Если вместо $\mathrm{sc}(z)$ взять функцию $\mathrm{cc}(z) = e^{2\pi i \mathrm{tr} z} + e^{2\pi i \mathrm{tr}\rho^2 z} + e^{2\pi i \mathrm{tr}\rho z}$, то для $F_0(z) = \prod_{s=0}^{p-1} \mathrm{cc}\left(z + \frac{s}{\omega^*}\right)$ аналогичным способом находим равенства

$$F_0(z) = \prod_{\gamma \in Q_p} (\zeta^{\gamma} e^{2\pi i \mathrm{tr} z} + \zeta^{\gamma f} e^{2\pi i \mathrm{tr}\rho^2 z} + \zeta^{\gamma f^2} e^{2\pi i \mathrm{tr}\rho z}), \tag{30}$$

$$F_0(z) = \mathrm{cc}(pz) + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} d(\lambda)\, \mathrm{cc}(\lambda z), \tag{31}$$

где коэффициенты $d(\lambda)$ те же, что и в разложении (14) функции $F(z)$. При $z = 0$ равенства (30), (31) позволяют найти соотношения

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0} d(\lambda) = M - 1, \qquad \sum_{\lambda \in \Lambda_0} d_0(\lambda) = h, \tag{32}$$

где $M = \prod_{r \in G_p} (\zeta^r + \zeta^{rf} + \zeta^{rf^2})$, $d_0(\lambda) = \dfrac{d(\lambda)}{p}$, $h = \dfrac{M-1}{p} \in \mathbb{N}$,

Л е м м а 2. *Для числа* Ω, *входящего в равенство* (4), *имеет место разложение*

$$\Omega = 1 + \sum_{\lambda \in \Lambda_r} d_0(\lambda)\, \lambda. \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С применением разложения функции sc в ряд Маклорена легко находим соотношение

$$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{sc}(\gamma z)}{\mathrm{sc}(z)} = \gamma, \quad \gamma, z \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

Воспользуемся теперь разложением (14) функции $F(z)$. Разделив правую и левую части равенства (14) на $\mathrm{sc}(z)$, получим

$$\frac{F(z)}{\mathrm{sc}(z)} = \varphi(z) = \frac{\mathrm{sc}(pz)}{\mathrm{sc}(z)} + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} d(\lambda) \frac{\mathrm{sc}(\lambda z)}{\mathrm{sc}(z)}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределам при $z \to 0$. В силу (7) и (34) имеем $p\Omega = p + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} d(\lambda)\lambda$. Разделив правую и левую части последнего равенства на p, найдем равенство (33) леммы 2.

Из леммы 2 и сравнения (13) следует соотношение $\alpha^3\omega \equiv 1 \pmod{\bar{\omega}}$ и кубический закон взаимности для модулей $\omega, \bar{\omega}$: $\left(\dfrac{\omega}{\bar{\omega}}\right)_3 = \left(\dfrac{\bar{\omega}}{\omega}\right)_3 = 1.$

Равенство (33) несколько преобразуем, чтобы можно было применить соотношение (32). Из определения множества K_0 следует, что точки $(k_0, k_1, k_2) \in K_0$ лежат внутри треугольника с вершинами $(0, 0, p)$, $(0, p, 0)$, $(p, 0, 0)$, определяющими плоскость $x + y + z = p$. Область всех внутренних точек этого треугольника будем обозначать через Δ. Тогда $K_0 \subset \Delta$. Преобразуем плоскость $x + y + z = p$ в плоскость $\xi + \eta + \theta = 0$ таким образом, чтобы при этом преобразовании точка (k_0^*, k_1^*, k_2^*) с $k_0^* + k_1^*\rho^2 + k_2\rho = \omega^*$ переходила в точку $(0, 0, 0)$. В п. 3 покажем, что такое преобразование определяется нахождением нормального решения в смысле А. Н. Тихонова следующей системы линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
c_0\xi + c_1\eta + c_2\theta + k_0^* &= x,\\
c_2\xi + c_0\eta + c_1\theta + k_1^* &= y,\\
c_1\xi + c_2\eta + c_0\theta + k_2^* &= z,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где

$$
c_0 = k_1^* - k_0^*, \quad c_1 = k_0^* - k_2^*, \quad c_2 = k_2^* - k_1^*, \quad c_0 + c_1 + c_2 = 0. \tag{36}
$$

Матрица этой системы вырождена, однако система является разрешимой. Для нахождения нормального решения будем пользоваться точными формулами, которые следуют из одного соотношения, принадлежащего А. Н. Тихонову.

3. Применение метода регуляризации А. Н. Тихонова. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$
Au = b, \tag{37}
$$

где A — матрица порядка n, u и b — n-мерные векторы-столбцы. Если правая часть b системы (37) удовлетворяет условию разрешимости, то среди всех решений существует единственное u^*, имеющее минимальную евклидову норму. Это решение и называется нормальным. Рассмотрим систему

$$
(A^TA + tE)\,u = A^Tb, \tag{38}
$$

где t — вещественный параметр, E — единичная матрица. При $t > 0$ матрица

$$
B = A^TA + tE \tag{39}
$$

невырождена. Пусть $u_t = (u_t^{(1)}, \dots, u_t^{(n)})^T$ — решение системы (38). Тогда для нормального решения системы (37) имеем

$$
u^* = \lim_{t\to 0} u_t. \tag{40}
$$

Обозначим через B_k матрицу, получаемую из матрицы (39) заменой ее k-го столбца столбцом A^Tb, и определим полиномы

$$
P(t) = \det B = p_0 + p_1t + \dots + p_nt^n, \tag{41}
$$

$$
P_k(t) = \det B_k = p_0^{(k)} + p_1^{(k)}t + \dots + p_{n-1}^{(k)}t^{n-1}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{42}
$$

Для решения системы (37) по формулам Крамера имеем

$$
u_t^{(k)} = \frac{\det B_k}{\det B} = \frac{P_k(t)}{P(t)}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{43}
$$

Пусть p_r — первый ненулевой коэффициент полинома (41), т. е.

$$
p_0 = p_1 = \dots = p_{r-1} = 0, \quad p_r \neq 0. \tag{44}
$$

Если система (37) разрешима, то для полиномов (42) должны выполняться равенства

$$
p_0^{(k)} = p_1^{(k)} = \dots = p_{r-1}^{(k)} = 0. \tag{45}
$$

Действительно, если бы это условие при некотором k не выполнялось, то для k-й компоненты вектора u^* мы бы имели $u_k^* = \lim \dfrac{P_k(t)}{P(t)} = \infty$, что противоречит (40). В силу (40) — (45) имеем

$$
u_k^* = p_r^{(k)}/p_r, \quad k = 1, \dots, n. \tag{46}
$$

Некоторые задачи, поставленные в некорректной форме, обладают бо́льшей симметрией, чем те же задачи, поставленные в корректной форме. При теоретических исследованиях таких задач применение формул (46) имеет такой же смысл, как и применение формул Крамера для задач корректных.

Применив формулы (46) к системе (35), найдем нормальное решение (ξ, η, θ) (поданное здесь в виде вектора-строки), для которого

$$\xi = \frac{c_0x + c_2y + c_1z + p}{3p}, \qquad \eta = \frac{c_1x + c_0y + c_2z - p}{3p},$$

$$\theta = \frac{c_2x + c_1y + c_0z}{3p}. \tag{47}$$

С использованием (36) убеждаемся, что $\xi + \eta + \theta = 0$, т. е. линейные выражения (47) задают некоторое преобразование плоскости $x + y + z = p$ в плоскость $\xi + \eta + \theta = 0$. Пусть σ обозначает это преобразование и $\Delta' = \sigma\Delta$, $K_0' = \sigma K_0$. Для $(k_0, k_1, k_2) \in K_0$ имеем $\sigma(k_0, k_1, k_2) = (s_0, s_1, s_2) \in K_0'$, где

$$s_0 = \frac{c_0k_0 + c_2k_1 + c_1k_2 + p}{3p}, \qquad s_1 = \frac{c_1k_0 + c_0k_1 + c_2k_2 - p}{3p},$$

$$s_2 = \frac{c_2k_0 + c_1k_1 + c_0k_2}{3p}. \tag{48}$$

Применяя (36) и (48), убеждаемся, что для (k_0^*, k_1^*, k_2^*) с $k_0^* + k_1^*\rho^2 + k_2^*\rho = \omega^*$ имеем $\sigma(k_0^*, k_1^*, k_2^*) = (0, 0, 0) \in K_0'$.

Преобразование $\sigma(k_0^*, k_1^*, k_2^*) = (\xi, \eta, \theta)$ является непрерывной функцией. Легко видеть, что компактное множество плоскости $x + y + z = p$ оно переводит в компактное множество плоскости $\xi + \eta + \theta = 0$, прямую линию — в прямую линию. Поэтому $\Delta' = \sigma\Delta$ — область внутренних точек треугольника с такими вершинами:

$$\sigma(0, 0, p) = ((c_1 + 1)/3, (c_2 - 1)/3, c_0/3), \ \sigma(0, p, 0) = ((c_2 + 1)/3, (c_0 - 1)/3, c_1/3).$$
$$\sigma(p, 0, 0) = ((c_0 + 1)/3, (c_1 - 1)/3, c_2/3).$$

Убедимся, что множество $K_0' \subset \Delta'$ является целочисленным и любая целочисленная точка $(s_0, s_1, s_2) \in \Delta'$ принадлежит K_0'.

Действительно, используя (10), (11) и (36), находим

$$c_1 \equiv c_0f^2, \quad c_2 \equiv c_0f \pmod p, \tag{49}$$

$$c_0k_0 + c_2k_1 + c_1k_2 \equiv 0, \quad c_1k_0 + c_0k_1 + c_2k_2 \equiv 0, \quad c_2k_0 + c_1k_1 + c_0k_2 \equiv 0 \pmod 3. \tag{50}$$

Используя (11), (27) и (36), получаем

$$c_0 \equiv -1, \quad c_1 \equiv 1, \quad c_2 \equiv 0 \pmod 3, \tag{51}$$

$$c_0k_0 + c_2k_1 + c_1k_2 \equiv -1, \quad c_1k_0 + c_0k_1 + c_2k_2 \equiv 1, \quad c_2k_0 + c_1k_1 + c_0k_2 \equiv 0 \pmod 3. \tag{52}$$

В силу (48), (50) и (52) имеем

$$\forall (s_0, s_1, s_2) \in K_0' \Rightarrow s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}. \tag{53}$$

Любая точка (ξ, η, θ) плоскости $\zeta + \eta + \theta = 0$ с помощью линейных выражений (35) преобразуется в такую точку (x, y, z), что $\sigma(x, y, z) = (\xi, \eta, \theta)$. Преобразование (35) плоскости $\xi + \eta + \theta = 0$ в плоскость $x + y + z = p$ можно рассматривать как обратное к преобразованию σ; обозначим его символом σ^{-1}. В частности, $\sigma^{-1}\Delta' = \Delta$. Используя теперь (49), (51), убеждаемся, что

$$\forall (s_0, s_1, s_2) \in \Delta' \quad (s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \sigma^{-1}(s_0, s_1, s_2) \in K_0. \tag{54}$$

В силу (53), (54) имеем $K_0' = \{(s_0, s_1, s_2) \in \Delta' \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}\}$, что и требовалось доказать.

С использованием множества K_0' и применением соотношения (32) равенство (33) приводится в виду

$$\Omega = 1 + \tilde{\Omega} + w, \tag{55}$$

где $\tilde{\Omega} = h\omega^*$, $w = \omega^* (\rho - 1) \sum_{(s_0, s_1, s_2) \in K_0'} d_0 (s_0, s_1, s_2) (s_0 + s_1\rho^2 + s_2\rho)$, $d_0(s_0, s_1, s_2) = d_0 (\sigma^{-1} (s_0, s_1, s_2))$. Число $h (> 0)$ не зависит от выбора модуля ω (зависит от p). Вычисления показывают, что оно значительно увеличивается с ростом p. Число ω^* положительно мнимо и в виду равенства (55) естественно предположить, что слагаемое $\tilde{\Omega}$ указывает не только на верхнюю полуплоскость, но и на сектант, внутри которого лежит Ω: число Ω лежит в том же сектанте комплексной плоскости, что и число ω^*. Эта гипотеза проверялась для всех подходящих $p < 1000$.

1. *Решетуха И. В.* Один вопрос теории кубических вычетов.— Мат. заметки, 1970, **2**, вып. 4, с. 469—476.
2. *Решетуха И. В.* Аналитическое определение одного произведения кубического характера.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, вып. 2, с. 193—201.
3. *Хассе Н.* Лекции по теории чисел.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 527 с.
4. *Дэвенпорт Г.* Мультипликативная теория чисел.— М.: Наука, 1971.— 199 с.
5. *Cassels J. W. S.* On Kummer sums. — Proc. London Math. Soc., 1970, **21**, p. 19—27.— Рус. пер.: Математика : Период. сб. пер., 1972, **16**, № 1, с. 156—164.
6. *Loxton J. H.* Products related to Gauss sums.— J. reine und angew. Math., 1974, **268/269**, p. 53—67.
7. *Eisenstein G.* Nachtrag zum cubischen Reziprozitätssatzes für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzen complexen Zahhen.— Ibid., 1844, **27**, S. 289—310.
8. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 285 с.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев
Получено 17.07.81