УДК 517.946

И. Д. Пукальский, М. И. Матийчук

О применениях функций Грина параболических краевых задач к задачам оптимального управления

В настоящей статье с помощью функции Грина задачи с косой производной [1] исследуется задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа второго порядка. Критерии качества задаются объемными или поверхностными интегралами. Для данной задачи устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решения, эквивалентность поставленной задачи системе интегральных уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Задачи оптимального управления для уравнений с частными производными со специальными критериями качества рассматривались в работах [3, 5, 6, 8—10].

1. Минимизация объемного интеграла. а). Внутреннее управление. Рассмотрим в цилиндрической области

$Q = (0, T) \times \Omega$ задачу нахождения пары функций (u, p), доставляющих минимум функционалу

$$\mathscr{I}(p) = \int_0^T dt \int_\Omega F(t, x; u, u_x, p)\, dx \tag{1}$$

в классе функций $C^\alpha(Q)$, из которых $u(t, x, p)$ является решением краевой задачи

$$L(D)\, u \equiv D_t u - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x)\, D^2_{x_i x_j} u - \sum_{i=1}^n a_i(t, x)\, D_{x_i} u - a(t, x)\, u = f(t, x, p), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{3}$$

$$Bu|_\Gamma = \left[\frac{du}{d\vec{b}} + b_0(t, x)\, u\right]\Big|_\Gamma = \left[\sum_{k=1}^n b_k(t, x)\, D_{x_k} u + b_0(t, x)\, u\right]\Big|_\Gamma = g(t, x), \tag{4}$$

где $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $\Gamma = (0, T) \times S$, S — граница ограниченной области Ω, $\cos(\vec{b}, \vec{n}) > 0$, $\vec{n}$ — внутренняя нормаль.

Предположим, что для задачи (1) — (4) выполнены следующие условия:

I) коэффициенты $a_{ij}(t, x) \in C^{2+\alpha}(Q)$, $a_i(t, x) \in C^{1+\alpha}(Q)$, $a(t, x) \in C^\alpha(Q)$, $b_k(t, x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0(t, x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$ и уравнение (2) равномерно параболическое [4];

II) функции $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, $g(t, x) \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $B\varphi|_S = g(0, x)$, $f(t, x, p)$ и $F(t, x, u, u_x, p)$ определены соответственно в областях $M_1 = Q \times E_1$ и $M_2 = M_1 \times E_{n+1}$, имеют вторые гельдеровые производные по (u, u_x, p), принадлежащие как функции (t, x) соответственно классам $C^\alpha(Q)$ и $C^{1+\alpha}(Q)$, $S \in C^{2+\alpha}$.

При условиях, налагаемых на гладкость коэффициентов уравнения (2) и краевого оператора B, существует функция Грина (G_1, G_2) ([1, с. 894]), с помощью которой решение определяется формулой

$$u(t, x, p) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G_1(t, x, \tau, \xi)\, f(\tau, \xi, p)\, d\xi + \int_\Omega G_1(t, x, 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_S G_2(t, x, \tau, \xi)\, g(\tau, \xi)\, d_\xi S \equiv G_1 ** f + G_1 * \varphi + G_2 * g \tag{5}$$

и для него имеет место оценка [4, с. 364]

$$|u|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leqslant c\,(|f|_{C^\alpha(Q)} + |\varphi|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} + |g|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}).$$

Пусть $L^*(D)$ — оператор, сопряженный к $L(D)$. Тогда для любой функции $v(t, x) \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$ справедлива формула Грина

$$\int_0^T dt \int_\Omega [vL(D)\, u - uL^*(D)\, v]\, dx = \int_0^T dt \int_S \left[v\left(\frac{du}{d\vec{b}} + b_0 u\right) - \right.$$

$$\left. - u\left(a^{(\lambda)} \frac{dv}{d\vec{\lambda}} + kv\right)\right] d_x S - \int_\Omega vu \Big|_{t=0}^{t=T} dx, \tag{6}$$

где коэффициенты $a^{(\lambda)}$, k и направление $\vec{\lambda}$ определены в [7, с. 19 — 20].

Обозначим $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}) \equiv (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p)$, $\psi_1(t, x; Y, u_{xx}) \equiv$ $\equiv D_u F(t, x; Y) - \sum_{i=1}^n D_{x_i}(D_{y_i} F(t, x; Y))$, $g_1(t, x; Y) \equiv - \sum_{i=1}^n D_{y_i} F(t, x\, Y) \times$

$\times \cos(\vec{n}, x_i)|_\Gamma$ и рассмотрим в области Q краевую задачу

$$L^*(D)\, v = \psi(t, x;\, Y, u_{xx}), \tag{7}$$

$$v|_{t=T} = 0, \tag{8}$$

$$B_\lambda v|_\Gamma \equiv \left[a^{(\lambda)} \frac{dv}{d\vec{\lambda}} + k(t, x)\, v \right]\Big|_\Gamma = g_1(t, x;\, Y). \tag{9}$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности управления $p(t, x)$.

Теорема 1. *Для того чтобы управление $p^0(t, x)$ и соответствующее ему решение $u^0(t, x, p^0)$ краевой задачи (2)—(4) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующей им функции $v^0(t, x)$ — решения задачи (7)—(9), выполнялись условия:*

1) *функция $H(u^0, u^0_x, v^0, p) \equiv F(t, x;\, u^0, u^0_x, p) + f(t, x, p)\, v^0(t, x)$ по аргументу p принимала в точке p^0 минимальное значение*

$$H(u^0, u^0_x, v^0, p^0) = \min_{p \in C^{\alpha}(Q)} H(u^0, u^0_x, v^0, p);$$

2) *для произвольного вектора $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n+1}) \neq 0$ и $(t, x) \in \bar{Q}$ имело место неравенство*

$$K(t, x, \xi) \equiv \sum_{ij=0}^{n+1} D^2_{y_i y_j} F(t, x;\, Y^0)\, \xi_i \xi_j + D^2_{pp} f(t, x, p^0)\, v^0(t, x)\, \xi^2_{n+1} > 0.$$

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $p^0(t, x)$ удовлетворяет условиям 1, 2, и покажем его оптимальность. Дадим управлению $p^0(t, x)$ некоторое допустимое приращение Δp и обозначим через Δu соответствующее ему приращение функции $u^0(t, x, p^0)$. Тогда Δu в области Q является решением краевой задачи

$$L(D)\, \Delta u = f(t, x, p^0 + \Delta p) - f(t, x, p^0), \quad \Delta u|_{t=0} = 0, \quad B\Delta u|_\Gamma = 0. \tag{10}$$

С помощью формулы Тейлора находим приращение функционала $\mathscr{I}(p)$:

$$\Delta \mathscr{I}(p^0) = \int_0^T dt \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^{n+1} D_{y_i} F(t, x;\, Y^0)\, \Delta y_i + 2^{-1} \sum_{ij=0}^{n+1} (D^2_{y_i y_j} F(t, x;\, Y^0)\, \Delta y_i y_i + \varepsilon_{ij} \Delta y_i \Delta y_i) \Big\}\, dx, \tag{11}$$

где $\varepsilon_{ij} \equiv D^2_{y_i y_j} F(t, x;\, \tilde{Y}) - D^2_{y_i y_j} F(t, x;\, Y^0)$, $\tilde{y}_i \in [y_i, y_i + \Delta y_i]$.

Из формулы (6) и того, что $v^0(t, x)$ — решение задачи (7) — (9), при $p = p^0$, $u = u^0$ получим

$$\int_0^T dt \int_\Omega \psi_1(t, x;\, Y^0)\, \Delta u dx - \int_0^I dt \int_S g_1(t, x;\, Y^0)\, \Delta u\, d_x S = \int_0^7 dt \int_\Omega [f(t, x, p^0 + \Delta p) - f(t, x, p^0)]\, v^0(t, x)\, dx. \tag{12}$$

Применив в (11) формулу Остроградского к слагаемым $D_{u_{x_i}} F(t, x;\, Y^0)\, \Delta u_{x_i}$ и учитывая (12), величину $\Delta \mathscr{I}(p^0)$ представим в виде

$$\Delta \mathscr{I}(p^0) = \int_0^T dt \int_\Omega \{ D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0)\, \Delta p + 2^{-1} K(t, x, \Delta y) + K^*(t, x, \Delta y)\, dx. \tag{13}$$

Здесь $K^*(t, x, \Delta y) = 2^{-1} \sum_{ij=0}^{n+1} \varepsilon_{ij} \Delta y_i \Delta y_j + 2^{-1} v^0(t, x)[D^2_{pp} f(t, x, \tilde{p}) - D^2_{pp} f(t, x, p^0](\Delta p)^2$.

Оценим $\Delta \mathcal{I}(p^0)$ снизу, учитывая, что по условию 1 $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0) = 0$. Обозначим $\delta(t, x) \equiv \inf_{|\xi|=1} K(t, x, \xi)$, которое положительное по условию 2 при всех $(t, x) \in \overline{Q}$. Тогда, очевидно, для квадратичной формы выполняется неравенство $K(t, x, \Delta y) \geqslant \delta(t, x) |\Delta y|^2$. Используя условия гельдеровости вторых производных функций $F(t, x; Y)$ и $f(t, x, p)$, находим $K^*(t, x, \Delta y) | \leqslant 2^{-1} c_0 |\Delta x|^{2+\alpha}$. На основании последних двух неравенств заключаем, что

$$\Delta \mathcal{I}(p^0) \geqslant 2^{-1} \int_0^T dt \int_\Omega [\delta(t, x) - c_0 |\Delta y(t, x)|^\alpha] |\Delta y(t, x)|^2 dx.$$

В силу формулы (5) $\Delta y(t, x) \to 0$ при $\Delta p(t, x) \to 0$, поэтому при достаточно малых Δp таких, что $|\Delta y| \leqslant (2^{-1} c_0^{-1} \delta(t, x))^{1/\alpha}$, приходим к неравенству

$$\Delta \mathcal{I}(p^0) \geqslant 4^{-1} \int_0^T dt \int_\Omega \delta(t, x) |\Delta y(t, x)|^2 dx > 0.$$

Необходимость. Пусть $p^0(t, x)$ — оптимальное, т. е. $\Delta \mathcal{I}(p^0) > 0$. Проверим выполнение условий 1, 2. Предположим, что $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0) \neq 0$. Тогда, выбирая достаточно малые разные по знаку в области Q приращения Δp, из формулы (13) получаем, что $\Delta \mathcal{I}(p^0)$ меняет знак в зависимости от знака Δp. Это противоречит наличию минимума функционала в точке p^0. Значит, $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0) = 0$.

Исследуем знак функции $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p)$ в окрестности p^0. Запишем приращение функционала $\mathcal{I}(p)$ в виде

$$\Delta \mathcal{I}(p^0) = \int_0^T dt \int_\Omega [D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0 + \Delta p) \Delta p + O(|\Delta y|^2)] dx.$$

При достаточно малых Δp из условия $\Delta \mathcal{I}(p^0) > 0$ следует, что $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p^0 + \Delta p) \Delta p > 0$, т. е. при $p < p^0$ $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p) < 0$ и при $p > p^0$ $D_p H(u^0, u^0_x, v^0, p) > 0$. Поэтому в точке $p = p^0$ функция $H(u^0, u^0_x, v^0, p)$ имеет минимум.

Теперь установим положительную определенность формы $K(t, x, \Delta y)$. Если $K(t, x, \Delta y) \leqslant 0$ в области Q, то с учетом условия 1 получаем $\Delta \mathcal{I}(p^0) \leqslant 0$, что невозможно. Предположим, что форма $K(t, x, \Delta y) \geqslant 0$ в $Q^+ \subset Q$ и $K(t, x, \Delta y) = -|K(t, x, \Delta y)| < 0$ в $Q^- = Q \diagdown Q^+$. Воспользуемся теоремой о среднем для приращения функционала:

$$\Delta \mathcal{I}(p^0) = \iint_{Q^+} K(t, x, \Delta y) \, dt dx - \iint_{Q^-} |K(t, x, \Delta y)| \, dt dx + \int_0^T dt \int_\Omega K^*(t, x, \Delta y) dx =$$

$$= K(t^+, x^+, \Delta y^+) \operatorname{mes} Q^+ - |K(t^-, x^-, \Delta y^-)| \operatorname{mes} Q^- + \int_0^T dt \int_\Omega K^*(t, x, \Delta y) \, dx,$$

где $(t^\pm, x^\pm, \Delta y^\pm) \in Q^\pm$.

При достаточно малом Δp знак $\Delta \mathcal{I}(p^0)$ определяется первыми двумя членами суммы. Разность этих членов меняет знак в зависимости от величины значений $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$; при достаточно малой $\operatorname{mes} Q^+$ имеем $\Delta \mathcal{I}(p^0) < 0$ и $\Delta \mathcal{I}(p^0) > 0$, если таковым является $\operatorname{mes} Q^-$. Следовательно, при знакопеременной форме $K(t, x, \Delta y)$ функционал не имеет минимума.

Поясним, как доказывается существование p^0, u^0, v^0. Если p^0 — оптимальное, то $D_p H(u^0, u^0_x, u^0, p^0) = 0$ и $D^2_{pp} H(u^0, u^0_x, v^0, p^0) > 0$. В силу теоремы о неявных функциях [2], примененной к уравнению $D_pH(u^0, u_x^0, v^0, p^0) = 0$, существует такая дифференцируемая функция $W_1(u^0, u_x^0, v^0)$, что $p^0 = W_1(u^0, u_x^0, v^0)$.

Обозначим через $(G^{(1)}, G^{(2)})$ — функцию Грина задачи (7) — (9). Используя формулу (5), в соответствие задаче (2) — (4) и (7) — (9) поставим систему интегральных уравнений

$$u^0 = G_1*\varphi + G_2*g + \int_0^t d\tau \int_\Omega G_1(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, W_1(u^0, u_\xi^0, v^0))\, d\xi,$$

$$u_{x_i}^0 = D_{x_i}(G_1*\varphi + G_2*g) + \int_0^t d\tau \int_\Omega D_{x_i}G_1(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, W_1(u^0, u_\xi^0, v^0))\, d\xi,$$

$$v^0 = \int_t^T d\tau \int_\Omega G^{(1)}(T-t, x, \tau-t, \xi) D_uF(\tau-t, \xi; u^0, u_\xi^0, W_1(u^0, u_\xi^0, v^0))\, d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_t^T d\tau \int_\Omega D_{\xi_i}G^{(1)}(T-t, x, \tau-t, \xi) D_{u_{\xi_i}}F(\tau-t, \xi; u^0, u_\xi^0, W_1(u^0, u_\xi^0, v^0))\, d\xi -$$

$$- \int_t^T d\tau \int_S G^{(1)}(T-t, x, \tau-t, \xi) \sum_{i=1}^n D_{u_{\xi_i}}F(\tau-t, \xi; u^0, u_\xi^0, W_1(u^0, u_\xi^0, v^0)) \times$$

$$\times \cos(\vec{n}, \xi_i)\, d_\xi S + \int_t^T d\tau \int_S G^{(2)}(T-t, x, \tau-t, \xi) g_1(\tau-t, \xi, u^0, u_\xi^0,$$

$$W_1(u^0, u_\xi^0, v^0))\, d_\xi S.$$

Ее решение находится методом последовательных приближений; при этом используются свойства и оценки функций Грина [1].

Замечание 1. Если функция $F(t, x; Y)$ не зависит от u_x, то условие 2 эквивалентно таким неравенствам:

$$D_u^2F(t, x; u^0p^0) > 0,\ D_{up}^2F(t, x; u^0, p^0)\, D_pf(t, x, p^0) > 0.$$

б). Граничное управление. В области Q рассмотрим следующую задачу. Среди решений краевой задачи

$$L(D)u = f_1(t, x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad Bu|_\Gamma = \Phi(t, x, p) \tag{14}$$

найти то, на котором достигается минимум функционала

$$\mathcal{I}_1(p) = \int_0^T dt \int_\Omega [F_1(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x) D_{x_i}u]\, dx + \int_0^T dt \int_S \psi(t, x, p)\, d_xS. \tag{15}$$

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* I, II, $\varphi(t, x, p) \in C_p^{2+\alpha}(E_1,)$ $\Phi(t, x, p) \in C_p^{2+\alpha}(E_1) \cap C^{1+\alpha}(\Gamma)$, *функция* $H_1(v_1^0, p) = \psi(t, x, p) + \Phi(t, x, p)\, v_1^0(t, x)$ *принимает минимальное значение как функция* p *в точке* p^0 *и* $D_u^2F_1(t, x, u^0) > 0$. *Тогда задача* (14), (15) *имеет единственное решение в точке* (u^0, p^0). *Здесь* $v_1^0(t, x)$ — *решение краевой задачи*

$$L^*(D)\, v_1^0 = -D_uF_1(t, x, u^0) + \sum_{i=1}^n D_{x_i}\varphi_i(t, x), \quad v_1^0|_{t=T} = 0,$$

$$B_\lambda v_1^0|_\Gamma = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x) \cos(\vec{n}_2, x_i). \tag{16}$$

Подставляя в формулу Грина (6) $v(t, x) \equiv v_1^0(t, x)$, получаем

$$\int_0^T dt \int_\Omega [-D_u F_1(t, x, u^0)\Delta u + \sum_{i=1}^n D_{x_i}\varphi_i(t, x)\Delta u_{x_i}]\, dx + \int_0^T dt \int_S \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x) \times$$
$$\times \cos(\vec{n}, x_i)\Delta u d_x S = \int_0^T dt \int_S [\Phi(t, x, p^0 + \Delta p) - \Phi(t, x, p^0)]\, v_1^0(t, x)\, d_x S. \tag{17}$$

Следовательно, применяя формулу Тейлора, равенство (17) и определение функции $H_1(v_1^0, p)$, находим

$$\Delta\mathcal{I}^1(p^0) = \int_0^T dt \int_S [H_1(v_1^0, p^0 + \Delta p) - H_1(v_1^0, p^0)]\, d_x S + 2^{-1}\int_0^T dt \int_\Omega [D_u^2 F_1(t, x, u^0) +$$
$$+ \varepsilon_2](\Delta u)^2\, dx.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения в случае а), убеждаемся в том, что в соответствие задачам (14)—(16) можно поставить систему интегральных уравнений

$$u^0 = G_1{**}f_1 + G_1{*}\varphi + \int_0^t d\tau \int_S G_2(t, x, \tau, \xi)\, \Phi(\tau, \xi, W_2(v_1^0))\, d_\xi S,$$

$$v_1^0 = \int_t^T dt \int_\Omega G^{(1)}(T - t, x, \tau - t, \xi)\, [-D_u F_1(\tau - t, \xi, u^0) + \sum_{i=1}^n D_{\xi_i}\varphi_i(\tau - t, \xi)] \times$$
$$\times d\xi + \int_t^T d\tau \int_S G^{(2)}(T - t, x, \tau - t, \xi) \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau - t, \xi)\cos(\vec{n}, \xi_i)\, d_\xi S,$$

решение которой легко найти. Здесь $p^0 = W_2(v_1^0)$ — решение уравнения $D_p H_1(v_1^0, p^0) = 0$.

2. Минимизация поверхностного интервала. а). Внутреннее управление. Пусть состояние $u(t, x, p)$ определяется как решение задачи (2) — (4), а функция стоимости имеет вид

$$\mathcal{I}_2(p) = \int_0^T dt \int_S F_2(t, x, u)\, d_x S + \int_0^T dt \int_\Omega \Phi_1(t, x, p)\, dx. \tag{18}$$

Найдем пару функций (u^0, p^0), которая доставляет минимум функционала (18).

Теорема 3. *Если выполнены условия* I, II, $\Phi_1 \in C_p^{2+\alpha}(E_1)$, *функция* $H_2(v_2^0, p) = \Phi_1(t, x, p) + v_2^0(t, x) f(t, x, p)$ *как функция* p *достигает минимума в точке* p^0 *и* $D_u^2 F_2(t, x, u^0) > 0$, *то существует единственное решение задач* (2) — (4), (17). *Функция* $v_2^0(t, x)$ *является решением краевой задачи*

$$L^*(D) v_2^0 = 0, \quad v_2^0|_{t=T} = 0, \quad B_\lambda v_2^0|_\Gamma = D_u F_2(t, x, u^0). \tag{19}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. Подставляя в формулу Грина (6) значение $v(t, x) = v_2^0(t, x)$, получаем

$$\int_0^T d\tau \int_S D_u F_2(t, x, u^0)\Delta u dx = \int_0^T dt \int_\Omega [f(t, x, p^0 + \Delta p) - f(t, x, p^0)]\, v_2^0(t, x)\, dx. \tag{20}$$

Используя формулу Тейлора и равенство (20), находим приращение функционала $\mathcal{I}_2(p)$:

$$\Delta\mathcal{I}_2(p^0) = \int_0^T dt \int_\Omega [H_2(v_2^0 p^0 + \Delta p) - H_2(v_2^0, p^0)]\, dx + 2^{-1}\int_0^T dt \int_S [D_u^2 F_2(t, x, u^0) +$$
$$+ \varepsilon_1](\Delta u)^2 d_x S.$$

Таким образом, в силу условий, налагаемых на функции $H_2(v_2^0, p^0)$, $\Phi(t, x, p^0)$ и $F_2(t, x, u^0)$, имеем $\Delta \mathcal{I}_2(p^0) > 0$.

Решая уравнение $D_p H_2(v_2^0, p) = 0$ относительно p^0, находим $p^0 = W_3(v_2^0)$. Следовательно, функции $v_2^0(t, x)$ и $u^0(t, x, W_3(u_2^0))$ будут решениями системы интегральных уравнений

$$u^0 = G_1 * \varphi + G_2 * g + \int_0^t d\tau \int_\Omega G_1(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, W_3(v_2^0))\, d\xi,$$

$$v_2^0 = \int_t^T d\tau \int_S G^{(2)}(T - t, x, \tau - t, \xi) D_u F_2(\tau - t, \xi, u^0)\, d_\xi S.$$

б). Граничное управление. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\mathcal{I}_3(p) = \int_0^T dt \int_S F_3(t, x, u, p)\, d_x S \tag{21}$$

при условии, что $u(t, x, p)$ — решение краевой задачи (14).

Теорема 4 *Предположим, что функция* $H_3(u^0, v_3^0, p) = F_3(t, x, u^0, p) + \Phi(t, x, p) v_3^0(t, x)$, *как функция* p, *достигает минимума в точке* p^0, $D_u^2 F_3(t, x, u^0 p^0) > 0$ *и выполнены условия* I, II. *Тогда решением задачи* (14), (21) *будет точка* (u^0, p^0). *Функция* $v_3^0(t, x)$ — *решение краевой задачи*

$$L^*(D) v_3^0 = 0, \quad v_3^0|_{t=T} = 0, \quad B_\lambda v_3^0|_\Gamma = D_u F_3(t, x, u^0, W_4(u^0, v_3^0)).$$

Замечание 2. Аналогичные результаты справедливы для задачи Дирихле, а также для вырождающихся параболических уравнений [8].

1. *Матийчук М. И.* Задача с косой производной для параболических уравнений с минимальной гладкостью и вырождением.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, 40, № 4, с. 893—907.
2. *Алексеев В. М., Тихонов В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.— 429 с.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.— М.: Наука, 1978.— 463 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.— 614 с.
6. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики.— М.: Наука, 1975.— 478 с.
7. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа.— М.: Наука, 1957.— 256 с.
8. *Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для вырождающегося параболического уравнения.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4, с. 459—466.
9. *Viorel Barbu.* Optimal Feedback controls for semilineas parabolic equations.— Lecture Notes in Math., 1983, 979, p. 43—70.
10. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Про оптимальне керування системами, що описуються загальними еліптичними граничними задачами.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 4, с. 558—562.

Черновиц. ун-т

Получено 17.04.84,
после доработки — 01.04.85