УДК 517.929

Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис, А. Л. Скубачевский

О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа

В работе [1] определены обобщенные решения краевых задач для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами. В этой работе доказано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри интервала, на котором эти решения определяются, в общем случае на бесконечных множествах точек даже при сколь угодно гладких краевых функциях и правых частях уравнений. В работе [2] доказана фредгольмова разрешимость этих задач и исследован их спектр.

В настоящей работе рассматриваются гладкие решения краевых задач для линейных дифференциально-разностных уравнений с несколькими старшими членами и постоянными коэффициентами в главной части. Описаны условия на краевые функции и на правые части уравнений, при которых существуют гладкие решения. Доказана нётерова разрешимость этих краевых задач и вычислен индекс соответствующего дифференциально-разностного оператора, который оказался равным —2.

При доказательствах полученных результатов использована связь между краевыми задачами для дифференциально-разностных уравнений и краевыми задачами для линейных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента с нелокальными краевыми условиями.

1. Свойства разностных операторов. Рассмотрим свойства разностного оператора, определенного соотношением $R_Q = P_Q R I_Q$, где I_Q: $:L_2(0, d) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения функции из $L_2(0, d)$ нулем вне $Q = (0, d)$; $P_Q: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(0, d)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на $(0, d)$; $R: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — разностный оператор вида $Ru(x) = \sum_{j=-N}^{N} b_j u(x+j)$, где b_j — вещественные числа, $d = N + \theta$, N — натуральное число, $0 < \theta \leqslant 1$.

Лемма 1.1. *Оператор* $R_Q: L_2(0, d) \to L_2(0, d)$ *ограниченный и* $R_Q^* = P_Q R^* I_Q$, *где* $R^* u(x) = \sum_{j=-N}^{N} b_{-j} u(x+j)$.

Доказательство очевидно.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup_{l=1}^{r} Q_{\alpha l}\right)$ подпространство функций в $L_2(0, d)$, равных нулю вне $\bigcup_{l=1}^{r} Q_{\alpha l}$, где $\alpha = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $\alpha = 1$, если $\theta = 1$; $r = N + 1$ при $\alpha = 1$; $r = N$ при $\alpha = 2$; $Q_{1l} = (l-1, l-1+\theta)$, $l = 1, \ldots, N+1$, и $Q_{2l} = (l-1+\theta, l)$, $l = 1, \ldots, N$.

Введем оператор $U_\alpha: L_2(Q) \to L_2^r(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha u)_l(x) = u(x + l - 1), \quad x \in Q_{\alpha 1}, \tag{1.1}$$

$l = 1, \ldots, r$. Здесь $L_2^r(Q_{\alpha 1}) = \prod_{l=1}^{r} L_2(Q_{\alpha 1})$. Этот оператор на $L_2\left(\bigcup_{l=1}^{r} Q_{\alpha l}\right)$ представляет собой изометрический изоморфизм на $L_2^r(Q_{\alpha 1})$. Очевидно, $R_{Q\alpha} = U_\alpha R_Q U_\alpha^{-1}: L_2^r(Q_{\alpha 1}) \to L_2^r(Q_{\alpha 1})$ есть оператор умножения на матрицу R_α порядка $r \times r$ с элементами $r_{ij} = b_{j-i}$. Отметим также соотношение

$$U_\alpha R_Q u = R_\alpha U_\alpha u, \quad u \in L_2(Q). \tag{1.2}$$

В работе [2] доказана следующая лемма.

Лемма 1.2. *Если* $0 < \theta < 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \bigcup_{\alpha=1}^{2} \sigma(R_\alpha)$; *если* $\theta = 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1)$, *где* $\sigma(\cdot)$ — *спектр оператора.*

Обозначим через $H^k(0, d)$ пространство комплекснозначных функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными вплоть до $(k-1)$-й и имеющих почти всюду k-ю производную из $L_2(0, d)$. Как известно, пространство $H^k(0, d)$ со скалярным произведением $(u, v)_{H^k(0,d)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^d u^{(i)}(x) \times \bar{v}^{(i)}(x)\, dx$ является гильбертовым. Введем пространство $\mathring{H}^k(0, d) = \{u \in H^k(0, d): u^{(i)}(0) = u^{(i)}(d) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, k-1\}$.

Лемма 1.3. *Оператор* R_Q *непрерывно отображает* $\mathring{H}^k(0, d)$ *в* $H^k(0, d)$; *при этом* $R_Q u^{(i)} = (R_Q u)^{(i)}$ *для* $u \in \mathring{H}^k(0, d)$, $i \leqslant k$.

Доказательство очевидно.

Обозначим через $H^1_\Gamma(0, d)$ подпространство функций $w \in H^1(0, d)$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{i1} w(i-1) = 0, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{i,N+1} w(\theta + i - 1) = 0, \tag{1.4}$$

где B_{ij} — алгебраическое дополнение элемента r_{ij} матрицы R_1. В силу определения матрицы R_1 соотношением $r_{ij} = b_{j-i}$ имеем $B_{11} = B_{N+1,N+1}$.

Лемма 1.4. *Пусть* $\det R_1 \neq 0$, $B_{11} \neq 0$. *Тогда оператор* R_Q *непрерывно и взаимно однозначно отображает* $\mathring{H}^1(0, d)$ *на* $H^1_\Gamma(0, d)$.

Доказательство. Из условий доказываемой леммы и из леммы 1.2 следует, что оператор R_Q инъективный. Поэтому в силу леммы 1.3 достаточно показать, что $R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) = H^1_\Gamma(0, d)$.

Докажем включение $R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) \subset H^1_\Gamma(0, d)$. По лемме 1.3 $R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) \subset H^1(0, d)$. Кроме того, в силу (1.1), (1.2) для $u \in \mathring{H}^1(0, d)$

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{i1}(R_Q u)(i-1) = \sum_{i=1}^{N+1} B_{i1}(U_1 R_Q u)_i(0) = \sum_{i=1}^{N+1} B_{i1}(R_1 U_1 u)_i(0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N+1} B_{i1} \sum_{j=2}^{N+1} r_{ij} u(j-1) = \sum_{j=2}^{N+1} u(j-1) \sum_{i=1}^{N+1} B_{i1} r_{ij} = 0.$$

Аналогично доказывается соотношение

$$\sum_{i=1}^{N+1} B_{i,N+1}(R_Q u)(\theta + i - 1) = 0.$$

Обратное включение $H^1_\Gamma(0, d) \subset R_Q(\mathring{H}^1(0, d))$ доказано в работе [3]

2. Дифференциально-разностные уравнения с однородными краевыми условиями. Рассмотрим уравнение

$$(Ru)''(x) = f(x), \quad x \in (0, d), \tag{2.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$u(x) = 0, \quad x \in [-N, 0] \cup [d, d+N], \tag{2.2}$$

где $f \in L_2(0, d)$.

Введем линейный оператор $\mathscr{L}$ по формуле $\mathscr{L}u = (R_Q u)''$ с областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L}) = \{u \in \mathring{H}^1(0, d) \colon R_Q u \in H^2(0, d)\}$.

Определение 2.1. *Назовем функцию* $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ *решением краевой задачи* (2.1), (2.2), *если* $\mathscr{L}u = f$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\det R_1 \neq 0$, $B_{11} \neq 0$. *Тогда*

$$\{u \in \mathscr{D}(\mathscr{L}) : u'(0+0) = u'(d-0) = 0\} = \mathring{H}^2(0, d).$$

Доказательство. Вложение

$$\mathring{H}^2(0, d) \subset \{u \in \mathscr{D}(\mathscr{L}) : u'(0+0) = u'(d-0) = 0\}$$

следует из леммы 1.3.

Докажем обратное вложение. Не ограничивая общности, полагаем $\theta=1$.

I. Пусть $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$. Тогда $w = R_Q u \in H^2(0, d)$, т. е. $U_1 w \in \prod_{l=1}^{N+1} H^2(0, 1)$, $l = 1, \dots, N+1$. Следовательно, используя (1. 1), получаем

$$U_1 u = R_1^{-1} U_1 w \in \prod_{l=1}^{N+1} H^2(0, 1).$$

Отсюда $u \in H^2(l-1, l)$, $l = 1, \dots, N+1$. Таким образом, для доказательств теоремы достаточно показать, что если $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L})$ и $u'(0+0) = u'(d-0) = 0$ то $u'(l-0) = u'(l+0)$, $l = 1, \dots, N$.

II. Так как $R_Q u \in H^2(0, d)$, то

$$(R_Q u)'|_{x=l-0} = (R_Q u)'|_{x=l+0}, \quad l = 1, \dots, N. \tag{2.3}$$

Соотношения (2. 3) в силу (1. 1) можно представить в виде

$$(R_1 U_1 u')_l|_{x=1-0} = (R_1 U_1 u')_{l+1}|_{x=0+0}, \quad l = 1, \dots, N. \tag{2.4}$$

Обозначим $\varphi_l = (U_1 u')_l|_{x=1-0}$, $\psi_l (U_1 u')_{l+1}|_{x=0+0}$, $l = 1, \dots, N$. Так как $u'(0+0) = (U_1 u')_1|_{x=0+0} = 0$, $u'(d-0) = (U_1 u')_{N+1}|_{x=1-0} = 0$, то из (2. 4) следует

$$\sum_{j=1}^{N} r_{lj}\varphi_j = \sum_{i=2}^{N+1} r_{l+1,i}\psi_{i-1}, \quad l = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

А поскольку $r_{l+1,i+1} = r_{li}$, то система уравнений (2. 5) примет вид

$$\sum_{j=1}^{N} r_{lj}(\varphi_j - \psi_j) = 0, \quad l = 1, \dots, N. \tag{2.6}$$

По условию $B_{11} = 0$. Но $B_{N+1,N+1} = B_{11}$, следовательно, система уравнений (2.6) имеет единственное решение $\varphi_j - \psi_j = 0$. Случай $0 < \theta < 1$ рассматривается аналогично.

Определение 2. 2. *Замкнутый линейный оператор A, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, называется нётеровым, если $\dim \mathscr{N}(A) < \infty$, $\mathcal{R}(A)$— замкнут и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(A) < \infty$, где $\mathscr{N}(A)$ — ядро, а $\mathcal{R}(A)$ — образ оператора A. Разность $\dim\mathscr{N}(A) - \operatorname{codim}\mathcal{R}(A) = \varkappa(A)$ называется индексом оператора A.*

Определение 2. 3. *Нётеров оператор $A: H_1 \to H_2$ называется фредгольмовым, если $\varkappa(A) = 0$.*

Обозначим через $\mathscr{L}_0$ сужение оператора $\mathscr{L}$ на $\mathring{H}^2(0, d)$.

Теорема 2. 2. *Пусть $\det R_1 \neq 0$, $B_{11} \neq 0$. Тогда оператор $\mathscr{L}_0: \mathring{H}^2(0, d) \to L_2(0, d)$ нётеров и $\dim \mathscr{N}(\mathscr{L}_0) = 0$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathscr{L}_0) = 2$.*

Доказательство. I. Докажем, что $\dim \mathscr{N}(\mathscr{L}_0) = 0$. Пусть $u \in \mathscr{N}(\mathscr{L})$, т. е. $(R_Q u)''(x) = 0$. Тогда $(R_Q u)(x) = c_1 + c_2 x$. Поскольку $\det R_1 \neq 0$, $B_{11} \neq 0$, получаем

$$u(x) = U_\alpha^{-1} R_\alpha^{-1} U_\alpha (c_1 + c_2 x), \quad x \in \bigcup_l Q_{\alpha l}. \tag{2.7}$$

Таким образом, $u(x)$ на интервале $(0, d)$ — кусочно-линейная функция. Очевидно, $u(x) \in \mathring{H}^2(0, d)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \equiv 0$.

II. В силу теоремы 2.1 для доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение $\mathscr{L}u = f$ имеет решение, обладающее свойством $u'(0+0) = u'(d-0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$(f, \varphi_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.8}$$

где φ_1, $\varphi_2 \in L_2(0, d)$ — некототорые линейно независимые функции.

Рассмотрим функцию $w = R_Q u$. Здесь u — решение уравнения $\mathscr{L}u = f$. В силу леммы 1. 4 функция w является решением уравнения

$$w''(x) = f(x), \quad x \in (0, d), \tag{2.9}$$

и удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4); обратно, если w обладает этими свойствами, то функция $u = R_Q^{-1}w$ — решение задачи (2.1), (2.2). Общее решение уравнения (2.9) имеет вид

$$w(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x (x-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (1.4), (1.3), получаем уравнения для определения констант c_1, c_2:

$$\begin{gathered} c_1 \sum_i B_{i1} + c_2 \sum_i (i-1) B_{i1} = -\sum_i B_{i1} \int_0^{i-1} (i-1-\tau) f(\tau)\, d\tau, \\ c_1 \sum_i B_{i,N+1} + c_2 \sum_i (\theta + i - 1) B_{i,N+1} = -\sum_i B_{i,N+1} \int_0^{\theta+i-1} (\theta + i - 1 - \tau) \times \\ \times f(\tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{2.11}$$

(суммирование по i производится от 1 до $N+1$).

В силу (1. 1)

$$(U_1 u')(x) = R_1^{-1} U_1 w'(x), \quad x \in (0, \theta), \tag{2.12}$$

где $(U_1 w')(x) = (w'(x), w'(x+1), \ldots, w'(x+N))$.

Из (2. 12), (1. 1) следует, что условия $u'(0+0) = 0$ и $u'(d-0) = 0$ примут вид

$$\begin{gathered} u'(0+0) = (U_1 u')_1 (0+0) = \sum_i \frac{B_{i1}}{\det R_1} (U_1 w')_i (0+0) = \\ = \sum_i \frac{B_{i1}}{\det R_1} w'(i-1+0) = \sum_i \frac{B_{i1}}{\det R_1} \left(c_2 + \int_0^{i-1} f(\tau)\, d\tau \right) = 0, \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} u'(d-0) = (U_1 u')_{N+1} (\theta - 0) = \sum_i \frac{B_{i,N+1}}{\det R_1} (U_1 w')_i (\theta - 0) = \\ = \sum_i \frac{B_{i,N+1}}{\det R_1} w'(i - 1 + \theta - 0) = \sum_i \frac{B_{i,N+1}}{\det R_1} \left(c_2 + \int_0^{\theta+i-1} f(\tau)\, d\tau \right) = 0. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Таким образом, уравнение $\mathcal{L}u = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда система линейных алгебраических уравнений (2.11) совместна. Решения $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ уравнения $\mathcal{L}u = f$ принадлежат $H^2(0, d)$ в том и только в том случае, когда выполнены условия (2.13), (2.14).

Рассмотрим систему (2.11) отдельно для разных случаев.

а). Пусть определитель системы (2.11) отличен от нуля. Тогда краевая задача (2.9), (1.4), (1.3) имеет единственное решение w для любой $f \in L_2(0, d)$. Следовательно, в силу леммы 1.4 решение уравнения $\mathcal{L}u = f$ также существует и единственно для любой $f \in L_2(0, d)$. Это решение $u \in H^2(0, d)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.13), (2.14), где

$$\begin{gathered} c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta_2 = \left(\sum_i B_{i,N+1} \right) \left(\sum_i B_{i1} \int_0^{i-1} (i-1-\tau) f(\tau)\, d\tau \right) - \\ - \left(\sum_i B_{i1} \right) \left(\sum_i B_{i,N+1} \int_0^{\theta+i-1} (\theta + i - 1 - \tau) f(\tau)\, d\tau \right), \end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\Delta = \left(\sum_i B_{i1} \right) \left(\sum_i (\theta - 1 + i) B_{i,N+1} \right) - \left(\sum_i B_{i,N+1} \right) \left(\sum_i (i-1) B_{i1} \right). \tag{2.16}$$

Таким образом, $u \in \mathring{H}^2(0, d)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.8), где функции φ_1, φ_2 определяются из формул (2.13), (2.15) и (2.14), (2.15) соответственно. В частности, так как $B_{11} = B_{N+1,N+1}$, при $N \leqslant \tau \leqslant d$

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{1}{\Delta \det R_1}\left(\sum_i B_{i1}\right)^2 B_{11}(d-\tau), \quad \varphi_2(\tau) = -\frac{1}{\Delta \det R_1} \times$$

$$\times \left(\sum_i B_{i1}\right)\left(\sum_i B_{i,N+1}\right) B_{11}(d-\tau) + \frac{B_{11}}{\det R_1}.$$

Поскольку $B_{11} \neq 0$, функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ линейно независимы, если $\sum_i B_{i1} \neq 0$.

Пусть теперь $\sum_i B_{i1} = 0$. Тогда, очевидно, при $0 \leqslant \tau \leqslant \theta$

$$\varphi_1(\tau) = \sum_{i=2}^{N+1} \frac{B_{i1}}{\det R_1}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{1}{\Delta \det R_1}\left(\sum_i B_{i,N+1}\right)^2 \left(\sum_{i=2}^{N+1} B_{i1}(i-1-\tau)\right) +$$

$$+ \frac{1}{\det R_1}\left(\sum_i B_{i,N+1}\right).$$

Так как $\sum_{i=1}^{N+1} B_{i1} = 0$, имеем $\sum_{i=2}^{N+1} B_{i1} \neq 0$. Кроме того, так как $\sum_i B_{i1} = 0$, а $\Delta \neq 0$, в силу формулы (2.16) получим $\sum_i B_{i,N+1} \neq 0$. Следовательно, $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ линейно независимы.

б). Пусть теперь $\Delta = 0$, но при этом $\sum_i B_{i1} \neq 0$ или $\sum_i B_{i,N+1} \neq 0$. В силу п. II теоремы 2.2 уравнение $\mathscr{L}u = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\Delta_2 = \left(\sum_i B_{i,N+1}\right)\left(\sum_i B_{i1}\int_0^{i-1}(i-1-\tau) f(\tau)\, d\tau\right) -$$

$$-\left(\sum_i B_{i1}\right)\left(\sum_i B_{i,N+1}\int_0^{\theta+i-1}(\theta+i-1-\tau) f(\tau)\, d\tau\right) = 0. \tag{2.17}$$

При этом константа c_2 в формуле (2.10) может быть произвольной, а c_1 определяется через c_2 из системы уравнений (2.11).

Для того чтобы решение $u \in \mathring{H}^2(0, d)$ в силу (2.13), (2.14), необходимо и достаточно, чтобы константа c_2 и функция $f(\tau)$ удовлетворяли условиям

$$\left(\sum_i B_{i1}\right) c_2 + \sum_i B_{i1}\int_0^{i-1} f(\tau)\, d\tau = 0, \tag{2.18}$$

$$\left(\sum_i B_{i,N+1}\right) c_2 + \sum_i B_{i,N+1}\int_0^{i-1+\theta} f(\tau)\, d\tau = 0. \tag{2.19}$$

Из (2.18), (2.19) получим

$$\left(\sum_i B_{i,N+1}\right)\left(\sum_i B_{i1}\int_0^{i-1} f(\tau)\, d\tau\right) - \left(\sum_i B_{i1}\right)\left(\sum_i B_{i,N+1}\int_0^{i-1+\theta} f(\tau)\, d\tau\right) = 0. \tag{2.20}$$

Таким образом, уравнение $\mathcal{L}u = f$ имеет решение $u \in \mathring{H}^2(0, d)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.8), где функции φ_1, φ_2 определяются из формул (2.17), (2.20) соответственно. В частности, при $N \leqslant \tau \leqslant d$

$$\varphi_1(\tau) = -\left(\sum_i B_{i1}\right) B_{11}(d-\tau), \quad \varphi_2(\tau) = -\left(\sum_i B_{i1}\right) B_{11}.$$

Если $\sum\limits_i B_{i1} \neq 0$, то $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ линейно независимы. Если $\sum\limits_i B_{i1} = 0$, то при $0 \leqslant \tau \leqslant \theta$ имеем

$$\varphi_1(\tau) = \left(\sum_i B_{i,N+1}\right)\left(\sum_{i=2}^{N+1} B_{i1}(i-1-\tau)\right) = \left(\sum_i B_{i,N+1}\right)\left(\sum_{i=2}^{N+1} B_{i1}(i-1) + B_{11}\tau\right),$$

$$\varphi_2(\tau) = \left(\sum_i B_{i,N+1}\right)\left(\sum_{i=2}^{N+1} B_{i1}\right) = -B_{11}\left(\sum_{i=1}^{N+1} B_{i,N+1}\right).$$

Очевидно, и в этом случае функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ линейно независимы.

в). Докажем теперь, что оставшийся случай $\sum\limits_i B_{i1} = \sum\limits_i B_{i,N+1} = 0$ невозможен. Предположим противное. Пусть $\sum\limits_i B_{i,N+1} = \sum\limits_i B_{i1} = 0$. Тогда $\Delta = 0$, уравнение $w''(x) = 0$ с краевыми условиями (1.4), (1.3) имеет нетривиальное решение $w = c_1 + c_2 x$. В этом случае в силу леммы 1.4 уравнение $\mathcal{L}u = 0$ имеет нетривиальное решение $u(x) = R_Q^{-1} w(x)$, которое удовлетворяет условиям

$$u(0) = (U_1 u)_1(0) = \sum_i \frac{B_{i1}}{\det R_1}(U_1 w)_i(0) = \sum_i \frac{B_{i1}}{\det R_1} w(i-1) =$$
$$= \frac{c_2}{\det R_1}\left(\sum_i B_{i1}(i-1)\right), \tag{2.21}$$

$$u(d) = (U_1 u)_{N+1}(\theta) = \sum_i \frac{B_{i,N+1}}{\det R_1}(U_1 w)_i(\theta) = \sum_i \frac{B_{i,N+1}}{\det R_1} w(i-1+\theta) =$$
$$= \frac{c_2}{\det R_1}\left(\sum_i B_{i,N+1}(i-1+\theta)\right). \tag{2.22}$$

Поскольку $u(0) = u(d) = 0$, в силу (2.21), (2.22) должно быть либо $c_2 = 0$, либо $\sum\limits_i B_{i1}(i-1) = \sum\limits_i B_{i,N+1}(i-1+\theta) = 0$.

Если $c_2 = 0$, то $w(x) = c_1$. Следовательно, в силу (2.7) $u(x)$ — кусочно-постоянная функция. А так как $u(x) \in \mathring{H}^1(0, d)$, то $u(x) \equiv 0$. Получили противоречие.

Если $\sum B_{i1}(i-1) = \sum B_{i,N+1}(i-1+\theta) \equiv 0$, то ранг матрицы системы уравнений (2.11) равен нулю. Следовательно, c_1 и c_2 могут быть выбраны произвольно, в частности $c_2 = 0$, но тогда мы приходим к предыдущему случаю $w = c_1$. Теорема доказана.

3. Дифференциально-разностные уравнения с неоднородными краевыми условиями. Рассмотрим уравнение

$$(Ru)'' + A_1 u = f(x), \quad x \in (0, d), \tag{3.1}$$

с неоднородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x) &= \psi_1(x) \text{ при } x \in [-N, 0], \\ u(x) &= \psi_2(x) \text{ при } x \in [d, d+N], \end{aligned} \tag{3.2}$$

где A_1: $H^1(-N, d+N) \to L_2(0,d)$ — линейный ограниченный оператор, $f \in \in L_2(0,d)$, $\psi_1 \in H^2(-N, 0)$, $\psi_2 \in H^2(d, d+N)$.

Введем пространство вектор-функций $\tilde{H} = L_2(0, d) \times H^2(-N, 0) \times \times H^2(d, d+N)$. Определим линейный ограниченный оператор $\mathscr{D}$: $H^2(-N, d + + N) \to \tilde{H}$ по формуле $\mathscr{D}u = (Au, u|_{(-N,0)}, u|_{(d,d+N)})$, где оператор A: $H^2(-N, d+N) \to L_2(0,d)$ определен по формуле $(Au)(x) = (Ru)'' + A_1 u$.

Определение 3.1. *Функцию* $u \in H^2(-N, d+N)$ *назовем гладким решением краевой задачи* (3.1), (3.2), *если* $\mathscr{D}u = F$, *где* $F = (f, \psi_1, \psi_2)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\det R_1 \neq 0$, $B_{11} \neq 0$. *Тогда оператор* $\mathscr{D}$: : $H^2(-N, d+N) \to \tilde{H}$ *нётеров и* $\varkappa(\mathscr{D}) = -2$.

Доказательство. В силу полной непрерывности оператора вложения $H^2(-N, d+N)$ в $H^1(-N, d+N)$, оператор $A_1 : H^2(-N, d + + N) \to L_2(0, d)$ вполне непрерывный. Поэтому в силу известной теоремы о вполне непрерывных возмущениях нётеровых операторов (см. [4], § 16) достаточно доказать теорему для случая $A_1 = 0$. Итак, пусть $A_1 = 0$. Введем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in (-N, 0), \\ \psi_2(x), & x \in (d, d+N), \\ \{\psi_1(0) + \psi_1'(0)x\}\eta(x) + \{\psi_2(d) + \psi_2'(d)(x-d)\}\eta(x-d), \\ x \in (0, d), \end{cases}$$

где $\eta(x)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая финитная функция такая, что $\eta(x) = 1$ при $|x| < 1/4$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| > 1/3$. Очевидно, что $\psi \in H^2(-N, d+N)$. С помощью замены $v = u - \psi$ краевая задача (3.1), (3.2) сводится к операторному уравнению

$$\mathscr{L}_0 v = f - (R\psi)''. \tag{3.3}$$

По теореме 2.1 уравнение (3.3) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$(f - (R\psi)'', \varphi_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.4}$$

где $\varphi_i \in L_2(0,d)$ линейно независимы. Введем линейный функционал $\Phi_i \times \times (\psi) = ((R\psi)'', \varphi_i)_{L_2(0,d)}$. Как известно,

$$|\psi_1^{(j)}(0)| \leqslant c_1 \|\psi_1\|_{H^2(-N,0)}, \quad |\psi_2^{(j)}(d)| \leqslant c_2 \|\psi_2\|_{H^2(d,d+N)}.$$

Здесь $j = 0, 1$; $c_1, c_2 > 0$. Так как $\psi \in H^2(-N, d+N)$, то $(R\psi)''(x) = (R\psi'')(x)$ при $x \in (0, d)$. Следовательно,

$$|\Phi_i(\psi)| \leqslant c \{\|\psi_1\|^2_{H^2(-N,0)} + \|\psi_2\|^2_{H^2(d,d+N)}\}^{1/2} \|\varphi_i\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$. Тогда по теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве

$$-(R\psi'', \varphi_i)_{L_2(0,d)} = (\psi_1, B_1\varphi_i)_{H^2(-N,0)} + (\psi_2, B_2\varphi_i)_{H^2(d,d+N)}.$$

Здесь $B_1 : L_2(0,d) \to H^2(-N, 0)$, $B_2 : L_2(0,d) \to H^2(d, d+N)$ — линейные ограниченные операторы.

Таким образом, условие (3.4) примет вид

$$(F, G_i)_{\tilde{H}} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.5}$$

где вектор-функции $G_i = (\varphi_i, B_1\varphi_i, B_2\varphi_i) \in \tilde{H}$ линейно независимы вследствие линейной независимости функций φ_1 и φ_2. Итак, краевая задача (3.1), (3.2) имеет гладкое решение тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.5), т. е. $\mathcal{R}(\mathscr{D}) = \overline{\mathcal{R}(\mathscr{D})}$ и $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathscr{D}) = 2$. По теореме 2.2 $\dim \mathscr{N}(\mathscr{D}) = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема означает, что для существования гладкого решения краевой задачи (3.1), (3.2) на правую часть f уравнения (3.1) и на краевые функции ψ_i в краевых условиях (3.2) следует наложить не менее двух и не более конечного числа условий ортогональности.

1. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и с несколькими старшими членами.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 3, с. 409—418.
2. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами.— Там же, 1976, **12**, № 5, с. 815—824.
3. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач.— Мат. сб., 1982, **117/159**, № 4, с. 548—558.
4. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 103 с.

Моск. авиац. ин-т Получено 24.07.84