УДК 519.8

М. И. Жалдак, Ю. В. Триус

Об одной задаче параметрического программирования

1. В вещественном гильбертовом пространстве H рассматривается задача определения $u \in \Omega_0 \subset H$, при котором достигается

$$\min_{x \in \Omega(u), u \in \Omega_0} \mu(x), \tag{1}$$

где $\mu(x)$ — выпуклый собственный непрерывный на H функционал,

$$\Omega(u) = \{x \in H \mid Ax + Bu - f = \underline{0}, \quad u \in \Omega_0\}, \tag{2}$$

$f \in H$, $A : H \to H$, $B : H \to H$ — линейные ограниченные непрерывно обратимые операторы, Ω_0 — выпуклое замкнутое множество, $\underline{0}$ — 0 в H.

Так как A имеет обратный оператор $A^{-1} : H \to H$, то при любом $u \in \Omega_0$ существует $x \in H$, удовлетворяющий условию

$$Ax + Bu - f = \underline{0}. \tag{3}$$

Тогда, учитывая выпуклость множества Ω_0, нетрудно показать, что множество $\Omega(u)$ выпукло.

Установим необходимое и достаточное условие оптимальности точки $u_* \in \Omega_0$ и соответствующей точки $x_* \in \Omega(u)$, т. е. таких, что $\mu(x_*) = \min\limits_{x \in \Omega(u), u \in \Omega_0} \mu(x)$. Здесь $Ax_* + Bu_* - f = \underline{0}$.

Теорема 1. *Для того чтобы точка $u_* \in \Omega_0$ была решением задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\partial\mu(x_*) \cap (-A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*)) \neq \varnothing, \tag{4}$$

где $\partial\mu(x_*)$ — субдифференциал функционала $\mu(x)$ в точке $x_* \in \Omega(u)$, A^* и B^* — операторы, сопряженные к A и B, $K(u_*) = \{s \in H \mid s = \beta(u - u_*)$, $\beta > 0$, $u \in \Omega_0\}$, $K^*(u_*) = \{w \in H^* \mid w(s) \geqslant 0 \ \forall s \in K(u_*)\}$, $-A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*) = \{w^* \in H^* \mid w^* = -A^*(B^*)^{-1}w$, $w \in K^*(u_*)\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u_* \in \Omega_0$ — решение задачи (1), (2). Тогда $\mu(x_*) \leqslant \mu(x)$ для любых $x \in \Omega(u)$, где $x_* \in \Omega(u)$, $Ax_* + Bu_* - f = \underline{0}$, т. е. точка x_* является точкой минимума функционала $\mu(x)$ на множестве $\Omega(u)$. При этом выполняется условие [3, 7]

$$\partial\mu(x_*) \cap K^*(x_*) \neq \varnothing, \tag{5}$$

где $K(x_*) = \{e \in H \mid e = \beta(x - x_*)$, $\beta > 0$, $x \in \Omega(u)\}$, $K^*(x_*) = \{v \in H^* \mid v(e) \geqslant 0 \ \forall e \in K(x_*)\}$.

Поскольку для любых $v \in K^*(x_*)$ и $e \in K(x_*)$

$$v(e) = v(\beta(x - x_*)) = v(\beta(A^{-1}(f - Bu) - A^{-1}(f - Bu_*))) =$$

$$= v(\beta(A^{-1}B(u_* - u))) = -B^*(A^*)^{-1}v(\beta(u - u_*)) = -B^*(A^*)^{-1}v(s) \geqslant 0$$

при любых $u \in \Omega_0$, то, положив $\tilde{w} = -B^*(A^*)^{-1}v$, получим, что множество $M^* = \{\tilde{w} \in H^* \mid \tilde{w} = -B^*(A^*)^{-1}v \forall v \in K^*(x_*)\}$ будет подмножеством множества $K^*(u_*)$. Но это значит, что для любого $v \in K^*(x_*)$ существует $w \in K^*(u_*)$, что имеет место представление $v = -A^*(B^*)^{-1}w$. Отсюда следует включение

$$K^*(x_*) \subseteq -A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует (4).

Достаточность. Пусть условие (4) выполнено. Так как для любых $w \in K^*(u_*)$ и $s \in K(u_*)$

$$w(s) = w(\beta(u - u_*)) = w(\beta(B^{-1}(f - Ax) - B^{-1}(f - Ax_*))) =$$

$$= w(\beta(B^{-1}A(x_* - x))) = -A^*(B^*)^{-1}w(\beta(x - x_*)) = -A^*(B^*)^{-1}w(e) \geqslant 0$$

при любых $x \in \Omega(u)$, то, положив $\tilde{v} = -A^*(B^*)^{-1}w$, получим, что множество $N^* = \{\tilde{v} \in H^* \mid \tilde{v} = -A^*(B^*)^{-1}w \ \forall w \in K^*(u_*)\}$ будет подмножеством множества $K^*(x_*)$. Тогда, очевидно,

$$-A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*) \subseteq K^*(x_*). \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\partial\mu(x_*) \cap K^*(x_*) \neq \varnothing$, т. е. $\mu(x_*) \leqslant \mu(x)$ при любых $x \in \Omega(u)$, где $x_* \in \Omega(u)$, что доказывает достаточность условий теоремы.

Пусть множество Ω_0 задается неравенством

$$\Omega_0 = \{u \in H \mid h(u) \leqslant 0\}, \tag{8}$$

где $h(u)$ — выпуклый непрерывный на H функционал и для некоторого $\overline{u} \in H$

$$h(\overline{u}) < 0. \qquad (9)$$

В этом случае [3, 7] для произвольного $u_0 \in \Omega_0$

$$K^*(u_0) = \begin{cases} \{\overline{0}\}, \text{ если } h(u_0) < 0, \\ -\mathfrak{K}(\partial h(u_0)), \text{ если } h(u_0) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Здесь $\mathfrak{K}(\partial h(u_0)) = \{z \in H^* \mid z = \lambda w, \ \lambda \geqslant 0, \ w \in \partial h(u_0)\}$, $\overline{0}$ — 0 в H^*.

Для любого $u_0 \in \Omega_0$ и $x_0 \in \Omega(u)$ введем множество

$$G(x_0, u_0) = \begin{cases} \partial\mu(x_0), \text{ если } h(u_0) < 0, \\ \operatorname{co}(\partial\mu(x_0) \cup (-A^*(B^*)^{-1}\partial h(u_0))), \text{ если } h(u_0) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Лемма 1. *Для того чтобы точка $u_* \in \Omega_0$ была решением задачи* (1), (2), (8), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{0} \in G(x_*, u_*), \qquad (12)$$

где $Ax_* + Bu_* - f = \underline{0}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено условие (4). Покажем, что из него вытекает (12). По предположению существует $v \in \partial\mu(x_*)$ и $w^* \in -A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*)$ такие, что

$$w^* - v = \overline{0}. \qquad (13)$$

Если $h(u_*) < 0$, то из (10) имеем $-A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*) = \{\overline{0}\}, w^* = \overline{0}$ и из (13) следует $v = \overline{0}$, т. е. $\overline{0} \in \partial\mu(x_*) \subseteq G(x_*, u_*)$.

Пусть $h(u_*) = 0$. Тогда из (10) получаем

$$-A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*) = A^*(B^*)^{-1}\mathfrak{K}(\partial h(u_*)).$$

Поэтому найдутся такие $\beta \geqslant 0$ и $w \in \partial h(u_*)$, что $w^* = \beta A^*(B^*)^{-1}w$, и из (13) находим $v - \beta A^*(B^*)^{-1}w = \overline{0}$. Следовательно, $(1+\beta)^{-1}v + \beta(1+\beta)^{-1} \times \times (-A^*(B^*)^{-1}w) = \overline{0}$, но $(1+\beta)^{-1}v + \beta(1+\beta)^{-1}(-A^*(B^*)^{-1}w) \in G(x_*, u_*)$, значит, $\overline{0} \in G(x_*, u_*)$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Покажем, что (4) является следствием (12). Если $h(u_*) < 0$, то это очевидно. Пусть $h(u_*) = 0$. Включение (12) означает, что найдутся такие $v \in \partial\mu(x_*)$, $w^* \in -A^*(B^*)^{-1}\partial h(u_*)$ и число $\alpha \in [0; 1]$, что

$$\alpha v + (1-\alpha)w^* = \overline{0}, \qquad (14)$$

причем $\alpha \neq 0$, так как в силу условия Слейтера [9] $\overline{0} \notin \partial h(u_*)$. Разделив (14) на α, получим $v + (1-\alpha)\alpha^{-1}w^* = \overline{0}$ или $v = (\alpha-1)\alpha^{-1}w^*$, но $(\alpha-1)\alpha^{-1}w^* \in -A^*(B^*)^{-1}K^*(u_*)$, и, следовательно, $\partial\mu(x_*) \cap (-A^*(B^*)^{-1} \times \times K^*(u_*)) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Для решения задачи (1), (2), (8) при некоторых дополнительных условиях предлагается итерационный метод, основу которого составляет процесс, разработанный в [4, 8].

2. Предположим, что:

а) функционал $\mu(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \mu(x) = +\infty; \qquad (15)$$

б) для любых $u \in \Omega_0$, $x \in \Omega(u)$ и $g \in G(x, u)$

$$\|g\| \leqslant M < \infty; \qquad (16)$$

в) для любого $u_0 \in Fr\Omega_0$ и $w_0 \in \partial_\varepsilon h(u_0)$ такого, что $\|w_0\| = \min\limits_{w \in \partial_\varepsilon h(u_0)} \|w\|$, выполняется условие

$$0 < m_0 \leqslant \|w_0\|, \qquad (17)$$

где $Fr\Omega_0 = \{u \in \Omega_0 \mid h(u) = 0\}$, $\varepsilon > 0$ — некоторое число, $\partial_\varepsilon h(u_0) = \{w \in H^* \mid h(u) - h(u_0) \geqslant w(u - u_0) - \varepsilon \quad \forall u \in H\}$ — ε-субдифференциал $h(u)$ в точке u_0. Заметим, что условие (17) есть некоторый аналог условия Слейтера [3, 4]. Будем также считать, что могут быть достаточно точно выполнены операции вычисления значений функционалов $\mu(x)$ и $h(u)$, их субградиентов и операция нахождения минимума $\mu(x)$ на луче.

За начальное приближение возьмем такую точку $x_0^{(0)} \in H$, что $u_0^{(0)} = B^{-1}(f - Ax_0^{(0)}) \in \Omega_0$. Определим $g_0^{(0)} \in \tilde{G}(x_0^{(0)}, u_0^{(0)}) \subseteq G(x_0^{(0)}, u_0^{(0)})$, где $\tilde{G}(x_0^{(0)}, u_0^{(0)})$ — выпуклая оболочка конечного числа элементов из $G(x_0^{(0)}, u_0^{(0)})$, который удовлетворяет условию

$$\| g_0^{(0)} \| = \min_{g \in \tilde{G}(x_0^{(0)},\, u_0^{(0)})} \| g \| \geqslant \min_{g \in G(x_0^{(0)},\, u_0^{(0)})} \| g \| \tag{18}$$

и

$$\mu(x_0^{(0)} - te_0^{(0)}) < \mu(x_0^{(0)}) \tag{19}$$

при $0 < t \leqslant t_0 < \infty$ и $u_0^{(0)} + tB^{-1}Ae_0^{(0)} \in \Omega_0$, где $e_0^{(0)} \in H$, $g_0^{(0)}(e_0^{(0)}) = \| g_0^{(0)} \|^2$.

Пусть получено k-е приближение $x_k^{(0)} \in \Omega(u)$ и ему соответствующее $u_k^{(0)} = B^{-1}(f - Ax_k^{(0)})$. Найдем $g_k^{(0)} \in \tilde{G}(x_k^{(0)}, u_k^{(0)})$, удовлетворяющий условиям (18), (19). В [3] показано, что такой $g_k^{(0)}$ существует. Если $\| g_k^{(0)} \| = 0$, то $u_k^{(0)} \in \Omega_0$, $x_k^{(0)} \in \Omega(u)$ — решение задачи (1), (2), (8).

Пусть $\| g_k^{(0)} \| \neq 0$. Переход к $(k+1)$-му приближению $x_{k+1}^{(0)}, u_{k+1}^{(0)}$, который назовем k-м циклом, осуществляется следующим образом.

п.0. Положим $j = 0$.

п.1. Определим точку $x_k^{(j+1)} = x_k^{(0)} - t_k^{(j)} e_k^{(j)}$, для которой $\mu(x_k^{(j+1)}) = \min_{t > 0} \mu(x_k^{(0)} - te_k^{(j)}) = \mu(x_k^{(0)} - t_k^{(j)} e_k^{(j)})$ и $u_k^{(j+1)} = B^{-1}(f - Ax_k^{(j+1)}) = u_k^{(0)} + t_k^{(j)} B^{-1} A e_k^{(j)} \in \Omega_0$, где $e_k^{(j)} \in H$, $g_k^{(j)}(e_k^{(j)}) = \| g_k^{(j)} \|^2$, $g_k^{(j)}$ — элемент минимальной нормы в множестве $U_k^{(j)} = \mathrm{co}\left(\bigcup_{p=1}^{j} \{\bar{g}_k^{(p)}\} \cup \tilde{G}(x_k^{(0)}, u_k^{(0)}) \right)$, $j \geqslant 1$, $\bar{g}_k^{(p)} \in G(x_k^{(p)}, u_k^{(p)})$ и $\bar{g}_k^{(p)}(e_k^{(p-1)}) = 0$.

п.2. Если $\mu(x_k^{(0)}) - \mu(x_k^{(j+1)}) \geqslant \Theta_k$, где $\Theta_k > 0$ — некоторое достаточно малое число, то полагаем $u_{k+1}^{(0)} = u_k^{(j+1)}$, $x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(j+1)}$, $\Theta_{k+1} = \Theta_k$, $j = 0$ и на этом k-й цикл заканчивается. В противном случае, т. е. при $\mu(x_k^{(0)}) - \mu(x_k^{(j+1)}) < \Theta_k$, переходим на п.3.

п.3. Если $\| g_k^{(j)} \| < \Theta_k$, то полагаем $\Theta_{k+1} = \Theta_k/2$, $j = 0$, $u_{k+1}^{(0)} = u_k^{(j_0)}$, $x_{k+1}^{(0)} = x_k^{(j_0)}$, где $u_k^{(j_0)}$ и $x_k^{(j_0)}$ удовлетворяют условию

$$\mu(x_k^{(j_0)}) = \min_{1 \leqslant p \leqslant j+1} \mu(x_k^{(p)}),$$

$u_k^{(j_0)} = B^{-1}(f - Ax_k^{(j_0)}) \in \Omega_0$, и на этом k-й цикл заканчивается, иначе, т. е. при $\| g_k^{(j)} \| \geqslant \Theta_k$, переходим на п.4.

п.4. Находим $g_k^{(j+1)} \in U_k^{(j+1)}$ такой, что $\| g_k^{(j+1)} \| = \min_{g \in U_k^{(j+1)}} \| g \|$, где $U_k^{(j+1)} = \mathrm{co}\left(\bigcup_{p=1}^{j+1} \{\bar{g}_k^{(p)}\} \cup \tilde{G}(x_k^{(0)}, u_k^{(0)}) \right)$, $\bar{g}_k^{(j+1)} \in G(x_k^{(j+1)}, u_k^{(j+1)})$ и

$$\bar{g}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) = 0, \tag{20}$$

полагаем $j = j + 1$ и переходим на п.1.

Заметим, что условие $\| g_k^{(j)} \| \geqslant \Theta_k$ при конечном Θ_k может выполняться лишь конечное число раз. В самом деле, так как $\bar{g}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то [3—5]

$$\| g_k^{(j+1)} \| \leqslant \| g_k^{(j)} \| \left(1 - \frac{\| g_k^{(j)} \|^2}{4M^2} \right)^{1/2}. \tag{21}$$

Так что при конечном $\Theta_k \geqslant \Theta > 0$ условие $\| g_k^{(j)} \| \geqslant \Theta_k$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, может выполняться лишь конечное число раз. Таким образом, $\| g_k^{(j)} \| \to 0$ при $j \to \infty$, а следовательно, и $\Theta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $x_k^{(j+1)} \in \Omega(u)$, $u_k^{(j+1)} = B^{-1}(f - Ax_k^{(j+1)}) \in \Omega_0$ *такие, что*

$$\mu(x_k^{(j+1)}) = \min_{t>0} \mu(x_k^{(0)} - te_k^{(j)}) = \mu(x_k^{(0)} - t_k^{(j)} e_k^{(j)}). \tag{22}$$

Тогда в множестве $G(x_k^{(j+1)}, u_k^{(j+1)})$ *существует элемент* $\bar{g}_k^{(j+1)}$, *удовлетворяющий условию* (20) *и*

$$\bar{g}_k^{(j+1)} = \bar{\alpha}_k^{(j+1)} \bar{v}_k^{(j+1)} + (1 - \bar{\alpha}_k^{(j+1)}) \bar{w}_k^{*(j+1)}, \tag{23}$$

где $\bar{v}_k^{(j+1)} \in \partial\mu(x_k^{(j+1)})$, $\bar{v}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) \geqslant 0$, $\bar{w}_k^{*(j+1)} \in -A^*(B^*)^{-1} \partial h(u_k^{(j+1)})$, $\bar{w}_k^{*(j+1)} = -A^*(B^*)^{-1} \bar{w}_k^{(j+1)}$, $\bar{w}_k^{(j+1)} \in \partial h(u_k^{(j+1)})$, $\bar{w}_k^{(j+1)}(-B^{-1}Ae_k^{(j)}) \leqslant 0$,

$$\bar{\alpha}_k^{(j+1)} = -\frac{\bar{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)})}{\bar{v}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) - \bar{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)})}, \quad \bar{\alpha}_k^{(j+1)} \in [0; 1]. \tag{24}$$

Прежде чем перейти к доказательству леммы 2, приведем некоторые вспомогательные предложения [см., например, 3, 6, 9].

Предложение 1. *Пусть* $f(x)$ — *выпуклый собственный непрерывный в точке* $\tilde{x} \in H$ *функционал. Направление* e *является направлением спуска функционала* $f(x)$ *в точке* $\tilde{x}$ *тогда и только тогда, когда* $g(e) < 0$ *для любых* $g \in \partial f(\tilde{x})$.

Предложение 2. *Пусть функционал* $f(x)$ *в точке* $\tilde{x} \in H$ *непрерывен и при этом выполняется условие* $f(\tilde{x}) = \min_{\alpha>0} f(x_0 + \alpha e)$. *Тогда в выпуклом множестве* $\partial f(\tilde{x})$ *существует такой элемент* $\tilde{g}$, *что* $\tilde{g}(e) = 0$.

Доказательство леммы 2. 1. Пусть $u_k^{(j+1)} \in \operatorname{int} \Omega_0$, т. е. $h(u_k^{(j+1)}) < 0$. Тогда $G(x_k^{(j+1)}, u_k^{(j+1)}) = \partial\mu(x_k^{(j+1)})$ и минимальное значение функционала на луче $x_k^{(0)} - te_k^{(j)} \in H$ совпадает с $\mu(x_k^{(j+1)})$. Отсюда в силу предложения 2 существует $\bar{g}_k^{(j+1)}$, для которого справедливы утверждения леммы при $\bar{\alpha}_k^{(j+1)} = 1$.

2. Пусть $u_k^{(j+1)} \in Fr\Omega_0$, т. е. $h(u_k^{(j+1)}) = 0$. Тогда $G(x_k^{(j+1)}, u_k^{(j+1)}) = \operatorname{co}(\partial\mu(x_k^{(j+1)}) \cup (-A^*(B^*)^{-1} \partial h(u_k^{(j+1)})))$ и

$$\mu(x_k^{(j+1)}) \geqslant \min_{\alpha>0} \mu(x_k^{(0)} - \alpha e_k^{(j)}). \tag{25}$$

Если в (25) имеет место равенство, то по предложению 2 $\bar{g}_k^{(j+1)} \in \partial\mu(x_k^{(j+1)})$. Если в (25) выполняется строгое неравенство, то по предложению 1 для любых $v \in \partial\mu(x_k^{(j+1)})$ $v(e_k^{(j)}) > 0$. С другой стороны, в $\partial h(u_k^{(j+1)})$ найдется по крайней мере один функционал $\bar{w}_k^{(j+1)}$, что $\bar{w}_k^{(j+1)}(-B^{-1}Ae_k^{(j)}) \leqslant 0$ или $\bar{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)}) \leqslant 0$, так как в противном случае из точки $u_k^{(j+1)}$ можно было бы продолжить движение в направлении $B^{-1}Ae_k^{(j)}$, не выходя из Ω_0 и уменьшая $\mu(x)$ [4]. Если $\bar{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)}) = 0$, то существование $\bar{g}_k^{(j+1)} = \bar{w}_k^{*(j+1)}$ доказано, при этом $\bar{\alpha}_k^{(j+1)}$ в (24) равно 0. Пусть $\bar{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)}) < 0$. Рассмотрим элементы вида $g = \alpha \bar{v}_k^{(j+1)} + (1 - \alpha) \bar{w}_k^{*(j+1)}$, где $\bar{v}_k^{(j+1)}$ — произвольный элемент из $\partial\mu(x_k^{(j+1)})$, $\alpha \in]0; 1[$. Очевидно, что $g \in G(x_k^{(j+1)}, u_k^{(j+1)})$ при любых $\alpha \in]0; 1[$. Решим уравнение

$$(\alpha \bar{v}_k^{(j+1)} + (1 - \alpha) \bar{w}_k^{*(j+1)})(e_k^{(j)}) = 0 \tag{26}$$

относительно α. Учитывая линейность пространства H^*, уравнение (26) можно записать так: $\alpha \overline{v}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) + (1-\alpha)\overline{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)}) = 0$. Отсюда

$$\alpha = -\frac{\overline{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)})}{\overline{v}_k^{(j+1)}(e_k^{(j)}) - \overline{w}_k^{*(j+1)}(e_k^{(j)})}.$$

Легко видеть, что $\alpha \in]0; 1[$. Тогда, полагая $\overline{\alpha}_k^{(j+1)} = \alpha$, получаем $\overline{g}_k^{(j+1)} = \overline{\alpha}_k^{(j+1)} \times \overline{v}_k^{(j+1)} + (1-\alpha_k^{(j+1)})\overline{w}_k^{*(j+1)}$, что и требовалось доказать.

Положим $\tilde{\Omega} = L_k^{(0)}(x) \cap \Omega(u)$, где $L_k^{(0)}(x) = \{x \in H \mid \mu(x) \leqslant \mu(x_k^{(0)})\}$ — выпуклое замкнутое и ограниченное, в силу (15) (см. [1]) множество. Пусть $\| g_k^{(m)} \| < \Theta_k$, $u_* \in \Omega_0$, $x_* \in \Omega(u)$ — решение задачи (1), (2), (8).

Теорема 2. *Последовательность* $\mu(x_k^{(m)})$ *сходится к* $\mu(x_*)$ *при* $k + m \to \infty$ *и имеет место оценка*

$$\mu(x_k^{(m)}) - \mu(x_*) \leqslant \Theta_k (1 + d/\gamma), \tag{27}$$

где d — *диаметр множества* $\tilde{\Omega}$, $0 < \gamma \leqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\Psi_k^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i^{(0)} v_i^{(0)}(x - x_k^{(0)}) + \sum_{i=r+1}^{s} \lambda_i^{(0)} w_i^{*(0)}(x - x_k^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} \overline{g}_k^{(j)}(x - x_k^{(j)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(0)} \mu(x_k^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} \alpha_k^{(j)} \mu(x_k^{(j)}), \tag{28}$$

где $v_i^{(0)} \in \partial\mu(x_k^{(0)})$, $i = \overline{1, r}$, $w_i^{*(0)} \in -A^*(B^*)^{-1}\partial h(u_k^{(0)})$, $i = \overline{r+1, s}$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{(0)} \leqslant 1$, $\lambda_i^{(0)} \geqslant 0$, $\overline{g}_k^{(j)} \in G(x_k^{(j)}, u_k^{(j)})$ и согласно (23), (24) $\overline{g}_k^{(j)} = \alpha_k^{(j)} \overline{v}_k^{(j)} + (1 - \alpha_k^{(j)}) \times \overline{w}_k^{*(j)}$, $\alpha_k^{(j)} \in [0; 1]$, $j = \overline{1, m}$, $\overline{v}_k^{(j)} \in \partial\mu(x_k^{(j)})$, $\overline{w}_k^{*(j)} = -A^*(B^*)^{-1}\overline{w}_k^{(j)}$, $\overline{w}_k^{(j)} \in \partial h \times (u_k^{(j)})$, причем $g_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(0)} v_i^{(0)} + \sum_{i=r+1}^{s} \lambda_i^{(0)} w_i^{*(0)} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} \overline{g}_k^{(j)}$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} = 1$, $\lambda_k^{(j)} \geqslant 0$, $j = \overline{1, m}$.

Из определения субдифференциала имеем

$$v_i^{(0)}(x - x_k^{(0)}) \leqslant \mu(x) - \mu(x_k^{(0)}), \quad i = \overline{1, r}, \quad \overline{v}_k^{(j)}(x - x_k^{(j)}) \leqslant \mu(x) - \mu(x_k^{(j)}),$$

$$j = \overline{1, m}$$

для любых $x \in \Omega(u)$ и, поскольку $w_i^{*(0)}(x - x_k^{(0)}) = -A^*(B^*)^{-1} w_i^{(0)}(x - x_k^{(0)}) = -A^*(B^*)^{-1} w_i^{(0)}(A^{-1}(f - Bu) - A^{-1}(f - Bu_k^{(0)})) = w_i^{(0)}(u - u_k^{(0)})$, то $w_i^{*(0)}(x - x_k^{(0)}) = w_i^{(0)}(u - u_k^{(0)}) \leqslant h(u) - h(u_k^{(0)}) \leqslant 0$, $i = \overline{r+1, s}$, при любых $u \in \Omega_0$, $x \in \Omega(u)$. Аналогично $\overline{w}_k^{*(j)}(x - x_k^{(j)}) = \overline{w}_k^{(j)}(u - u_k^{(j)}) \leqslant h(u) - h(u_k^{(j)}) \leqslant 0$, $j = \overline{1, m}$, при любых $u \in \Omega_0$, $x \in \Omega(u)$. Тогда

$$\Psi_k^{(m)}(x) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(0)} \mu(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} \alpha_k^{(j)} \mu(x) = \gamma\mu(x)$$

для любых $x \in \Omega(u)$, где $\gamma = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_k^{(j)} \alpha_k^{(j)}$.

В силу предположения (17) при $\Theta_k < \| A \| \cdot \| B^{-1} \| \cdot m_0$ $\gamma \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\Psi_k^{(m)}(x)}{\gamma} \leqslant \mu(x) \tag{29}$$

при любых $x \in \Omega(u)$. С учетом (20), (29) имеем

$$0 \leqslant \mu(x_k^{(m)}) - \mu(x_*) \leqslant \mu(x_k^{(m)}) - \frac{1}{\gamma}\Psi_k^{(m)}(x_*) = \frac{1}{\gamma}(\gamma\mu(x_k^{(m)}) - \Psi_k^{(m)}(x_*)) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\gamma\mu(x_k^{(m)}) - \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(0)}\mu(x_k^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_k^{(j)}\alpha_k^{(j)}\mu(x_k^{(j)})\right) - \left(\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(0)}v_i^{(0)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_{i=r+1}^{s}\lambda_i^{(0)}\bar{w}_i^{*(0)}\right)(x_* - x_k^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_k^{(j)}\bar{g}_k^{(j)}(x_* - x_k^{(j)})\right)\right) \leqslant \frac{1}{\gamma}((\gamma\mu(x_k^{(m)}) -$$

$$- \gamma\min_{1\leqslant j\leqslant m}\mu(x_k^{(j)})) - \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(0)}v_i^{(0)} + \sum_{i=r+1}^{s}\lambda_i^{(0)}w_i^{*(0)} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_k^{(j)}\bar{g}_k^{(j)}\right)(x_* - x_k^{(0)})\Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta_k + \frac{1}{\gamma}g_k^{(m)}(x_k^{(0)} - x_*) \leqslant \Theta_k + \frac{1}{\gamma}\|g_k^{(m)}\|\|x_k^{(0)} - x_*\| \leqslant \Theta_k(1 + d/\gamma). \quad (30)$$

Отсюда $\mu(x_k^{(m)}) \to \mu(x_*)$ при $k + m \to \infty$ и имеет место (27). Теорема доказана. Заметим, что если $\|g_k^{(m)}\| = 0$, то из (30) следует $0 \leqslant \mu(x_k^{(m)}) - \mu(x_*) \leqslant \Theta_k$.

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1972.— 416 с.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : Общ. теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.— М. : Наука, 1981.— 400 с.
4. *Жалдак М. И.* Накапливающий итерационный процесс для решения задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве.— В кн. : Приближенные методы анализа. Киев : Киев. пед. ин-т, 1982, с. 46—58.
5. *Жалдак М. И.* Об одном методе решения задач квадратичного программирования.— Вычисл. и прикл. математика, 1984, № 52, с. 132—139.
6. *Заботин И. Я., Кораблев А. И.* Метод условного ε-субградиента.— Изв. вузов. Математика, 1983, № 9, с. 22—26.
7. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 143 с.
8. *Триус Ю. В.* Об одном численном методе минимизации недифференцируемого выпуклого функционала в гильбертовом пространстве.— В кн.: Тез. докл. IX шк. по теории операторов в функц. пространствах. Тернополь, 1984, с. 138.
9. *Lemarechal C.* An extension of Davidon method to nondifferentiable problems.— Math. Progr., 1975, Study 3, p. 95—100.
10. *Wolfe P.* A method of conjugate Subgradients for minimizing nondifferentiable functions.— Ibid., p. 145—173.

Киев. пед. ин-т

Получено 13.10.82,
после доработки — 01.06.84