УДК 517.917

М. Я. Свищук

О периодических решениях сингулярно возмущенных систем третьего порядка, допускающих параметризацию

В настоящей работе сформулированы условия существования периодических решений близких к разрывным (релаксационных колебаний) для сингулярно возмущенных систем третьего порядка, допускающих параметризацию. Работа основана на результатах, изложенных в [1—3]. При построении разрывных решений вырожденной системы в [1—3] существенную роль играет требование однозначной разрешимости системы уравнений, описывающей фазовую поверхность вырожденной системы, относительно быстрых переменных. Это требование оставляет вне поля зрения достаточно большой класс систем, в которых могут устанавливаться релаксационные колебания. Заменяя требование однозначной разрешимости условием, состоящим в том, что фазовая поверхность вырожденной системы допускает параметрическое представление, мы значительно расширяем класс рассматриваемых систем. Проведем соответствующие выкладки.

Рассмотрим систему

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y_1, y_2), \quad \dot{y}_1 = g_1(x, y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = g_2(x, y_1, y_2), \tag{1}$$

где x, y_1, y_2 — скалярные функции времени t, ε — малый положительный параметр. Правые части системы (1) предполагаются определенными во всем фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y_1, y_2 и достаточно гладкими.

Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему

$$f(x, y_1, y_2) = 0, \quad \dot{y}_1 = g_1(x, y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = g_2(x, y_1, y_2). \tag{2}$$

Первое уравнение системы (2) определяет в $\mathbb{R}^3$ поверхность Γ, которая является фазовой поверхностью вырожденной системы (2). Предположим, что Γ допускает параметрическое представление

$$x = X(u, v), \quad y_1 = Y_1(u, v), \quad y_2 = Y_2(u, v). \tag{3}$$

Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\partial Y_1/\partial u\cdot du/dt+\partial Y_1/\partial v\cdot dv/dt=g_1(X(u,v),\,Y_1(u,v),\,Y_2(u,v)),\qquad (4)$$
$$\partial Y_2/\partial u\cdot du/dt+\partial Y_2/\partial v\cdot dv/dt=g_2(X(u,v),\,Y_1(u,v),\,Y_2(u,v)).$$

Множество нерегулярных точек Γ_0 в терминах параметров u, v определяется равенствами (3) и условием

$$\partial Y_1/\partial u\cdot\partial Y_2/\partial v-\partial Y_2/\partial u\cdot\partial Y_1/\partial v=0.\qquad (5)$$

Отметим, что соотношение (5) является условием вырожденности системы (4), если рассматривать ее как алгебраическую систему второго порядка с неизвестными du/dt и dv/dt. Таким образом, если условие (5) не выполняется, то из (4) имеем

$$du/dt=G_1(u,v),\quad dv/dt=G_2(u,v).\qquad (6)$$

Разрешив систему дифференциальных уравнений (6), найдем

$$u=U(t,u_0,v_0),\quad v=V(t,u_0,v_0).\qquad (7)$$

Предположим, что равенство (5) можно разрешить относительно одного из параметров, например v. Тогда для нерегулярных точек поверхности Γ получим представление вида

$$x=\eta(u),\quad y_1=\psi_1(u),\quad y_2=\psi_2(u).\qquad (8)$$

Следуя [1], точку $S(x^0,y_1^0,y_2^0)$ будем называть точкой срыва, если для нее выполняются условия:

а) $x^0=\eta(u_0),\ y_1^0=\psi_1(u_0),\ y_2^0=\psi_2(u_0)$;

б) $g_1^2(x^0,y_1^0,y_2^0)+g_2^2(x^0,y_1^0,y_2^0)\neq 0$;

в) траектории вырожденной системы трансверсально пересекают Γ_0 в окрестности точки S;

г) касательная плоскость к Γ_0 в точке S проектируется в плоскость y_1Oy_2 вдоль Ox без вырождения.

В случае существования разрывных периодических решений системы (2) множество Γ_0 распадается на несколько непересекающихся подмножеств. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma_0=\Gamma_0^{(1)}\cup\Gamma_0^{(2)}$. Обозначим через $\varphi(t,\xi)$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, разрывное решение системы (2), такое, что при $t=t_0$ $\varphi(t_0,\xi)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

Пусть $\varphi(t,\xi^0)$ — периодическое, периода Т, решение системы (2), $\xi^0=(\xi_1^0,\xi_2^0,\xi_3^0)$, значение параметра u в точке ξ^0 равно u_0. Рассмотрим разрывное решение $\varphi(t,\xi^1)$ системы (2), такое, что ξ^1 — точка, близкая к точке ξ^0 принадлежит множеству $\Gamma_0^{(1)}$, соответствующее ей значение параметра $u=u_1$ Траектория решения $\varphi(t,\xi^1)$ вновь пересечет линию $\Gamma_0^{(1)}$ в точке $\xi^2=(\xi_1^2,\xi_2^2,\xi_3^2)$, которой соответствует значение параметра $u=u_2$. Компоненты решения $y_1(t,\xi^1)$, $y_2(t,\xi^1)$ изменяются непрерывно и для них справедливы равенства

$$y_1(t,\psi_1(u_1))=\psi_1(u_2),\quad y_2(t,\psi_2(u_1))=\psi_2(u_2).\qquad (9)$$

Функциональный определитель системы (9) по неизвестным функциям t и u, при $t=t_0+\mathrm{T}$, $u_1=u_0$, $u_2=u_0$ не равен нулю, поскольку векторы $(\dot y_1(t_0),\dot y_2(t_0))$ и $(\dot\psi_1(u_0),\dot\psi_2(u_0))$ линейно независимы в силу предположения в) в определении точки срыва. Следовательно, существует решение системы (9)

$$t=\tau(u_1),\quad u_2=\chi(u_1).\qquad (10)$$

Отображение χ множества $\Gamma_0^{(1)}$ в себя, определенное при малом $|u_0-u_1|$, является аналогом отображения последования (см. [5], § 28). Аналогичное отображение строится и для множества $\Gamma_0^{(2)}$.

На основании изложенного, а также теоремы из работы [3, с. 2177] заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть для вырожденной системы* (2) *выполняется условие* (3) *и система* (6) *разрешима относительно u и v. Кроме того, предполо-*

жим, что система (2) *имеет разрывное периодическое решение такое, что для каждого из отображений последования* χ *в точках срыва справедливо соотношение*

$$\dot{\chi}(u) \neq 1. \tag{11}$$

Тогда система (1) *при малых положительных* ε *имеет по крайней мере одно периодическое решение, траектория которого равномерно стремится к траектории периодического решения системы* (2) *при* $\varepsilon \to 0$.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\varepsilon \dot{x} = z - x - \varphi(x) k, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 2hx - y, \tag{12}$$

описывающую колебания мультивибратора с индуктивностью в анодной цепи. Здесь $h = R/2\sqrt{C/L}$; $k = \text{const}$ — параметры лампы, x, y, z — скалярные функции времени t; $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -1, \\ -x & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ -1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$ В [4] доказано, что при $h < 1$ вырожденная система

$$z - x - \varphi(x) k = 0, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 2hx - y \tag{13}$$

имеет разрывное периодическое решение.

Рассмотрим следующую простую параметризацию поверхности, определяющейся первым уравнением (13):

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u + k\varphi(u). \tag{14}$$

Тогда множество точек срыва определяется соотношением $u = \pm 1$. Медленные движения системы (13) имеют место при $|u| > 1$ и описываются системой равенств

$$u = c_1 \lambda_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_2 \exp(\lambda_2 t), \quad v = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t),$$
$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - 1}. \tag{15}$$

Исследуя движение фазовой точки по разрывной траектории системы (13), близкой к траектории периодического решения, находим значения производной функции последования χ в точках срыва:

$$\dot{\chi}(u_i) = \frac{\lambda_1 \exp(\lambda_2 t_i) - \lambda_2 \exp(\lambda_1 t_i)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где t_i — момент срыва, u_i — параметр срыва.

Таким образом, если λ_1 и λ_2 не равны одновременно нулю, то в системе (12) устанавливаются релаксационные колебания.

1. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Н.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебаний.— М. : Наука, 1975.— 247 с.
2. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным.— Докл. АН СССР, 1955, 102, № 5, с. 889—891.
3. *Орлов А. К.* О периодических решениях сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 12, с. 2176-2177.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний.— М. : Наука, 1969.— — 915 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1974.— 331 с.

Киев. ун-т

Получено 27.06.84