УДК 513.83

И. Ф. Кушнирчук

Условия линейной эквивалентности операторов с нижнетреугольными матрицами

В пространстве A_R всех однозначных аналитических в круге $K_R = \{z : |z| < R\}$, $R > 0$, функций с топологией компактной сходимости рассматриваются линейные непрерывные операторы J и A, имеющие в степенном базисе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства A_R соответственно диагональную $[\delta_{ik}\beta_i]_{i,k=0}^{\infty}$ и строго нижнетреугольную $[a_{ik}]_{i,k=0}^{\infty}$ матрицы, $a_{ik} = 0$ при $k \geqslant i \geqslant 0$ (δ_{ik} — символ Кронекера).

Если элементы β_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, диагональной матрицы оператора J попарно различны, то из теоремы 9 работы [1] следует, что при выполнении неравенств

$$\max_{0 \leqslant k < i} \frac{1}{|\beta_i - \beta_k|} \sum_{j=k}^{i-1} |a_{ij}| r^{j-k} \leqslant 1, \tag{1}$$

$$\max_{0 \leqslant k < i} \frac{1}{|\beta_i - \beta_k|} \sum_{j=k+1}^{i} |a_{jk}| r^{j-k} \leqslant 1 \tag{2}$$

для любого $r < R$ и всех $i \geqslant i_0(r)$ операторы $J + A$ и J линейно эквивалентны в пространстве A_R, т. е. существует автоморфизм T пространства A_R, удовлетворяющий соотношению

$$(J + A)T = TJ. \tag{3}$$

Установим необходимые условия линейной эквивалентности в пространстве A_R операторов $J + A$ и J в случае, когда имеется конечное число групп равных между собой элементов диагональной матрицы оператора $J : \beta_{i_1^{(\nu)}} = \beta_{i_2^{(\nu)}} = \ldots = \beta_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}} = \lambda_\nu$, $0 \leqslant i_1^{(\nu)} < i_2^{(\nu)} < \ldots < i_{p(\nu)}^{(\nu)}$; $p(\nu) \geqslant 2$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, $s \geqslant 1$, $i_1^{(1)} < i_1^{(2)} < \ldots < i_1^{(s)}$ при $s > 1$, причем $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$, если $\nu \neq \mu$.

Теорема 1. *Пусть операторы $J + A$ и J линейно эквивалентны в пространстве A_R. Тогда ранг матрицы*

$$B_{i_{p(\nu)}^{(\nu)} - i_1^{(\nu)}}(\lambda_\nu) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i_1^{(\nu)}+1, i_1^{(\nu)}} & \beta_{i_1^{(\nu)}+1} - \lambda_\nu & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{i_1^{(\nu)}+2, i_1^{(\nu)}} & a_{i_1^{(\nu)}+2, i_1^{(\nu)}+1} & \beta_{i_1^{(\nu)}+2} - \lambda_\nu & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_1^{(\nu)}} & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_1^{(\nu)}+1} & \ldots & \ldots & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2} & \beta_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1} - \lambda_\nu \\ a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_1^{(\nu)}} & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_1^{(\nu)}+1} & \ldots & \ldots & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2} & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

равен $i_{p(\nu)}^{(\nu)} - i_1^{(\nu)} - p(\nu) + 1$ *при каждом* $\nu = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. Так как оператор J имеет диагональную матрицу, то каждый ее элемент β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является собственным значением оператора J, которому соответствует (с точностью до постоянного множителя) собственная функция z^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В частности, собственному значению λ_ν соответствует $p(\nu)$ линейно независимых собственных функций оператора J: $z^{i_1^{(\nu)}}, z^{i_2^{(\nu)}}, \ldots, z^{i_{p(\nu)}^{(\nu)}}$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$. Поэтому вследствие линейной эквивалентности в A_R операторов $J + A$ и J каждому собственному значению λ_ν также должны соответствовать $p(\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$ линейно независимых собственных функций оператора $J + A$.

Пусть $\varphi_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{k\nu}z^k$ — собственная функция оператора $J+A$, соответствующая собственному значению λ_ν, т. е. $\varphi_\nu(z)$ является ненулевым решением уравнения $(J+A)w=\lambda_\nu w$, принадлежащим пространству A_R. Так как $(J+A)z^k=\beta_k z^k+\sum_{l=k+1}^{\infty}a_{lk}z^l$, то в круге K_R должно выполняться тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{k\nu}\left(\beta_k z^k+\sum_{l=k+1}^{\infty}a_{lk}z^l\right)\equiv\lambda_\nu\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{k\nu}z^k,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\varphi_{k\nu}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k-1}a_{kl}\varphi_{l\nu}\right)z^k\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_\nu\varphi_{k\nu}z^k.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях этого тождества, получаем следующие бесконечные системы линейных уравнений для определения коэффициентов $\varphi_{l\nu}$, $l=0,1,2,\ldots$; $1\leqslant\nu\leqslant s$:

$$\beta_0\varphi_{0\nu}=\lambda_\nu\varphi_{0\nu},\quad\sum_{l=0}^{k-1}a_{kl}\varphi_{l\nu}+\beta_k\varphi_{k\nu}=\lambda_\nu\varphi_{k\nu},\quad k=1,2,\ldots,\quad\nu=1,2,\ldots,s. \qquad (5)$$

Если $i_1^{(1)}>0$, то из (5) следует, что $\varphi_{0\nu}=\varphi_{1\nu}=\ldots=\varphi_{i_1^{(\nu)}-1,\nu}=0$. Тогда для определения последующих коэффициентов $\varphi_{k\nu}$ $(k=i_1^{(\nu)},i_1^{(\nu)}+1,\ldots)$ получим бесконечные системы линейных уравнений

$$\sum_{l=i_1^{(\nu)}}^{k-1}a_{kl}\varphi_{l\nu}+(\beta_k-\lambda_\nu)\varphi_{k\nu}=0,\quad k=i_1^{(\nu)}+1,\ i_1^{(\nu)}+2,\ldots,\quad\nu=1,2,\ldots,s. \qquad (5')$$

Поскольку при $k>i_{p(\nu)}^{(\nu)}$ $\beta_k\neq\lambda_\nu$, то коэффициенты $\varphi_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}+1,\nu},\varphi_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}+2,\nu},\ldots$ однозначно определяются из $(i_{p(\nu)}^{(\nu)}+1)$-го, $(i_{p(\nu)}^{(\nu)}+2)$-го, ... уравнений системы (5′) через коэффициенты $\varphi_{i_1^{(\nu)},\nu},\varphi_{i_1^{(\nu)}+1,\nu},\ldots,\varphi_{i_{p(\nu)}^{(\nu)},\nu}$, $\nu=1,2,\ldots,s$. Рассмотрим конечные подсистемы (5′), содержащие эти коэффициенты, которые получаются при изменении k от $i_1^{(\nu)}+1$ до $i_{p(\nu)}^{(\nu)}$, $\nu=1,2,\ldots,s$. Каждая из этих систем должна иметь $p(\nu)$ линейно независимых решений $\{\varphi_{i_1^{(\nu)},\nu},\varphi_{i_1^{(\nu)}+1,\nu},\ldots,\varphi_{i_{p(\nu)}^{(\nu)},\nu}\}$, $\nu=1,2,\ldots,s$. Но матрицы этих подсистем совпадают с матрицами $B_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-i_1^{(\nu)}}(\lambda_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots,s$, определенными равенствами (4). Поэтому их ранги должны быть равны разностям между числом $i_{p(\nu)}^{(\nu)}-i_1^{(\nu)}+1$ входящих в них искомых коэффициентов $\varphi_{l\nu}$, $l=i_1^{(\nu)},i_1^{(\nu)}+1,\ldots,i_{p(\nu)}^{(\nu)}$, и числом $p(\nu)$ линейно независимых решений, т. е. равны $i_{p(\nu)}^{(\nu)}-i_1^{(\nu)}-p(\nu)+1$, $\nu=1,2,\ldots,s$.

Если же $i_1^{(1)}=0$, то из системы (5) при $k=1,2,\ldots,i_{p(1)}^{(1)}$ получим подсистему для определения $\varphi_{01},\varphi_{11},\ldots,\varphi_{i_{p(1)}^{(1)},1}$, матрица которой равна $B_{i_{p(1)}^{(1)}-0}(\lambda_1)$. Ранг этой матрицы должен быть равным $i_{p(1)}^{(1)}-p(1)+1$, чтобы указанная подсистема имела $p(1)$ линейно независимых решений.

Теорема 2. *Если для любого $r<R$ выполняются неравенства* (1) *и* (2) *при $i\geqslant i_0(r)>\max_{1\leqslant\nu\leqslant s}\{p(\nu)\}$, а ранги матриц* (4) *при каждом $\nu=1,2,\ldots,s$ равны $i_{p(\nu)}^{(\nu)}-i_1^{(\nu)}-p(\nu)+1$, то операторы $J+A$ и J являются линейно эквивалентными в пространстве A_R.*

Доказательство. Обозначим через t_{ik}, $i, k = 0, 1, 2, \ldots$, элементы матрицы искомого автоморфизма T пространства A_R. Так как матрицы операторов в левой и правой частях равенства (3) должны совпадать, то, приравнивая элементы этих матриц, расположенные в i-й строке и k-м столбце, получаем такие рекуррентные соотношения:

$$(\beta_i - \beta_k) t_{ik} + \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} t_{jk} = 0, \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Из соотношений (6) видно, что элементы t_{ik} выражаются линейно через элементы t_{jk} k-го столбца и строк с номерами $j = 0, 1, 2, \ldots, i-1$. Это дает возможность считать, что матрица оператора T является нижнетреугольной ($t_{jk} = 0$ при $k > j$), а ее диагональные элементы $t_{ii} = 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда соотношения (6) принимают следующий вид:

$$(\beta_i - \beta_k) t_{ik} + \sum_{j=k}^{i-1} a_{ij} t_{jk} = 0, \quad i > k \geqslant 0. \tag{7}$$

Если $k \neq i_\mu^{(\nu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, p(\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, то элементы t_{ik} k-го столбца последовательно и однозначно определяются из соответствующих уравнений (7), поскольку в этом случае $\beta_i - \beta_k \neq 0$, $i > k$. Если же $k = i_\mu^{(\nu)}$ с фиксированными μ и ν, то при $i > i_{p(\nu)}^{(\nu)}$ элементы $t_{i, i_\mu^{(\nu)}}$ также определяются однозначно из бесконечной подсистемы уравнений системы (7), получающейся при указанном k и $i = i_{p(\nu)}^{(\nu)} + 1$, $i_{p(\nu)}^{(\nu)} + 2, \ldots$, через $t_{i_\mu^{(\nu)}+1, i_\mu^{(\nu)}}$, $t_{i_\mu^{(\nu)}+2, i_\mu^{(\nu)}}, \ldots, t_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}}$.

Остается проверить разрешимость конечной неоднородной (ведь $t_{i_\mu^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} = 1$) системы уравнений для определения этих элементов, которая имеет вид

$$\begin{gathered}
a_{i_\mu^{(\nu)}+1, i_\mu^{(\nu)}} t_{i_\mu^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} + (\beta_{i_\mu^{(\nu)}+1} - \lambda_\nu) t_{i_\mu^{(\nu)}+1, i_\mu^{(\nu)}} = 0, \\
a_{i_\mu^{(\nu)}+2, i_\mu^{(\nu)}} t_{i_\mu^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} + a_{i_\mu^{(\nu)}+2, i_\mu^{(\nu)}+1} t_{i_\mu^{(\nu)}+1, i_\mu^{(\nu)}} + (\beta_{i_\mu^{(\nu)}+2} - \lambda_\nu) t_{i_\mu^{(\nu)}+2, i_\mu^{(\nu)}} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_\mu^{(\nu)}} t_{i_\mu^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} + \ldots + a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2} t_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2, i_\mu^{(\nu)}} + (\beta_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1} - \lambda_\nu) \times \\
\times\, t_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_\nu^{(\nu)}} = 0, \\
a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} t_{i_\mu^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} + \ldots + a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2} t_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-2, i_\mu^{(\nu)}} + a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1} t_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_\mu^{(\nu)}} = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Если бы расширенная матрица системы (8) хотя бы при одном μ имела ранг на 1 больше ранга ее матрицы

$$\begin{bmatrix}
\beta_{i_\mu^{(\nu)}+1} - \lambda_\nu & 0 & \ldots & 0 \\
a_{i_\mu^{(\nu)}+2, i_\mu^{(\nu)}} & \beta_{i_\mu^{(\nu)}+2} - \lambda_\nu & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_\mu^{(\nu)}} & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1, i_\mu^{(\nu)}+1} & \ldots & \beta_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1} - \lambda_\nu \\
a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}} & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_\mu^{(\nu)}+1} & \ldots & a_{i_{p(\nu)}^{(\nu)}, i_{p(\nu)}^{(\nu)}-1}
\end{bmatrix},$$

то тогда и ранг матрицы $B_{i^{(\nu)}_{p(\nu)}-i^{(\nu)}_1}(\lambda_\nu)$ был бы больше, чем $i^{(\nu)}_{p(\nu)}-i^{(\nu)}_1-$ $-p(\nu)+1$. Но это противоречило бы условию доказываемой теоремы.

Заметим, что элементы $t_{i^{(\nu)}_{\mu+1},i^{(\nu)}_\mu}, t_{i^{(\nu)}_{\mu+2},i^{(\nu)}_\mu}, \ldots, t_{i^{(\nu)}_{p(\nu)},i^{(\nu)}_\mu}$ $i^{(\nu)}_\mu$-го столбца можно выбрать произвольно, так как они могут считаться свободными переменными при решении системы (8).

Проверим выполнение необходимых и достаточных условий непрерывности в пространстве A_R оператора T (см. [2]): для любого $\rho < R$ существуют $r = r(\rho) < R$ и постоянная $C = C(\rho) > 0$ такие, что при всех $i, k = 0,$ $1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|t_{ik}| \leqslant Cr^k/\rho^i. \tag{9}$$

Отметим, что для произвольно заданного $\rho < R$ неравенства (9) выполняются при $k \geqslant i$ для $t_{ik} = \delta_{ik}$ с постоянной $C = 1$ и любым r из $[\rho, R)$. За счет увеличения постоянной C можно удовлетворить неравенствам (9) для $0 \leqslant k < i < i'$ при фиксированном $i' > \max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s}\{p(\nu)\}$ и тех же r. Покажем теперь, что неравенства (9) выполняются для всех элементов $(i'+1)$-й строки. Полагая в (7) $i = i'+1$ и используя (9) для t_{jk} при $j = k,$ $k+1, \ldots, i'$ приходим к неравенствам

$$|t_{i'+1,k}| \leqslant \frac{1}{|\beta_{i'+1}-\beta_k|}\sum_{j=k}^{i'}|a_{i'+1,j}|\cdot|t_{jk}| \leqslant C\frac{r^k}{\rho^{i'+1}}\frac{1}{|\beta_{i'+1}-\beta_k|}\times$$
$$\times\sum_{j=k}^{i'}|a_{i'+1,j}|\cdot\rho^{i'+1-j}.$$

Если выбрать $r \in [\rho, R)$ и считать $i' \geqslant i_0(r)$, то из условия (1) получим $\beta_{i'+1}-\beta_k|^{-1}\sum\limits_{j=k}^{i'}|a_{i'+1,j}|\,r^{i'+1-j} \leqslant 1$ при всех $k = 0, 1, \ldots, i'$. Поэтому при $k = 0, 1, \ldots, i'$ имеем $|t_{i'+1,k}| \leqslant Cr^k/\rho^{i'+1}$. В силу принципа математической индукции заключаем, что неравенства (9) справедливы для всех элементов t_{ik} с $i > k \geqslant 0$. Значит, оператор T непрерывен в A_R.

Для нижнетреугольной матрицы $[t_{ik}]_{i,k=0}^\infty$ оператора T существует [3] обратная матрица $[t'_{ik}]_{i,k=0}^\infty$, имеющая ту же структуру (причем $t'_{ii} = 1,$ $i = 0, 1, 2, \ldots$). Она порождает в пространстве A_R линейный оператор T'. Умножая равенство (3) на T' слева и справа, приходим к соотношению

$$T'(J+A) = JT', \tag{3'}$$

из которого следует, что элементы t'_{ik} удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$(\beta_i-\beta_k)\,t'_{ik} = \sum_{j=k+1}^{i} t'_{ij}a_{jk}, \quad i > k \geqslant 0. \tag{7'}$$

Из соотношений (7′) и условия (2) следует выполнение неравенств (9) для элементов t'_{ik}. Поэтому и оператор $T' = T^{-1}$ непрерывен в пространстве A_R, т. е. T — автоморфизм этого пространства, удовлетворяющий соотношению (3). А это и означает, что операторы $J + A$ и J линейно эквивалентны в пространстве A_R.

В заключение заметим, что при выполнении условий теоремы 2 у оператора $J + A$ существует система собственных функций $\{\psi_k(z;\beta_k)\}_{k=0}^\infty$, которая образует квазистепенной базис пространства A_R. При этом размерности собственных подпространств оператора $J + A$, отвечающих собственным значениям $\beta_{i^{(\nu)}_\mu} = \lambda_\nu$, $\mu = 1, 2, \ldots, p(\nu)$, равны $p(\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, а остальные подпространства одномерны.

1. *Кушнирчук И. Ф., Фишман К. М.* К вопросу о подобии квазитреугольных матриц в пространстве аналитических функций в круге.— Изв. вузов. Математика, 1976, № 8, с. 42—51.
2. *Фишман К. М.* К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств.— Докл. АН СССР, 1959, 127, № 1, с. 40—43.
3. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.— М. : Физматгиз, 1960.— 471 с.

Черновиц. ун-т

Получено 15.07.83,
после доработки— 20.07.84