УДК 517.928

Н. А. Сотниченко

К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой

Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) с медленно меняющимися коэффициентами (ММК) [1, 2] обычно рассматривались на конечном промежутке и без особенностей по медленно меняющейся переменной. В [3—5] рассматривался вопрос расщепления систем ЛДУ с ММК на подсистемы меньшей размерности при наличии иррегулярной особой точки. Число работ, посвященных аналогичным задачам, незначительно [6—11]. В данной работе, следуя В. Вазову [8, 12, 13], дадим математическое обоснование формальных алгоритмов расщепления [3—5].

1. Рассмотрим систему [3—5]

$$dx/dt = \tau^q A(\tau, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon^\beta t$, β, q — целые неотрицательные числа, x — n-мерный вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матрица, ограниченная и голоморфная по комплексным переменным τ и ε в области $\Pi_\tau \times \Pi_\varepsilon$:

$$\Pi_\tau = \{\tau : |\tau| \geqslant L\}, \quad \Pi_\varepsilon = \{\varepsilon : 0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0, \quad |\arg \varepsilon| < \alpha_0\} \tag{2}$$

($L, \varepsilon_0, \alpha_0$ — фиксированные числа) и 1) обладает асимптотическим разложением

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \tau^{-r} \varepsilon^s A_{rs}, \tag{3}$$

2) собственные значения матрицы A_{00} разделяются на две группы:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p_1}, \tag{4}$$

$$\lambda_{p_1+1}, \ldots, \lambda_n, \tag{5}$$

$n - p_1 = p_2$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, если $j \leqslant p_1$, $k > p_1$.

Считаем, что

$$A_{00} = [W_{001}, W_{002}]. \tag{6}$$

Здесь W_{001} — $(p_1 \times p_1)$-матрица с собственными значениями (4), а W_{002} — $(p_2 \times p_2)$-матрица с собственными значениями (5). Предполагаем, что W_{00k}, $k = 1, 2$, состоят из канонических блоков Жордана. В [3 — 5] для системы (1) доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $A(\tau, \varepsilon)$ *удовлетворяет условиям* 1, 2. *Тогда существует формальное преобразование*

$$x = U(\tau, \varepsilon)\, \xi, \tag{7}$$

сводящее систему (1) *к системе*

$$d\xi/dt = \tau^q \Omega(\tau, \varepsilon)\, \xi, \quad \Omega(\tau, \varepsilon) = [\Omega_1(\tau, \varepsilon), \Omega_2(\tau, \varepsilon)], \tag{8}$$

в которой $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ — *квадратные матрицы порядка* $p_k \times p_k$, *причем*

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \tau^{-r} \varepsilon^s U_{rs}, \quad U_{00} = E, \tag{9}$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \tau^{-r} \varepsilon^s \Omega_{rs}, \quad \Omega_{00} = A_{00}. \tag{10}$$

Для доказательства теоремы, применяя (7) к системе (1), для неизвестных $U(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$ получаем тождество

$$\varepsilon^\beta \frac{dU(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = \tau^q [A(\tau, \varepsilon)\, U(\tau, \varepsilon) - U(\tau, \varepsilon)\, \Omega(\tau, \varepsilon)]. \tag{11}$$

Приравнивая в (11) коэффициенты при одинаковых степенях τ и ε, находим уравнения, из которых определяем неизвестные U_{rs}, Ω_{rs}, r, $s = 0, 1, \ldots$ (см. [3—5]).

Если ряд (9) сходящийся, то формальное расщепление будет точным. Покажем, что ряд (9) является асимптотическим по отношению к некоторой функции $U(\tau, \varepsilon)$, которая расщепляет систему (1). Следовательно, тогда и блочно-диагональная матрица $\Omega(\tau, \varepsilon)$ в (8) не будет голоморфной при $\tau = \infty$, а представляется асимптотическим разложением (10).

На основании изложенного выше имеем

$$A(\tau, \varepsilon) = A_0(\varepsilon) + O(\tau^{-1}), \tag{12}$$

$$A_0(\varepsilon) = A_{00} + O(\varepsilon), \tag{13}$$

$$A_0(\varepsilon) = [A_{01}(\varepsilon), A_{02}(\varepsilon)], \tag{14}$$

где $A_{0k}(\varepsilon)$ — $(p_k \times p_k)$-матрицы,

$$A_{0k}(\varepsilon) = A_{0k} + O(\varepsilon). \tag{15}$$

Введем новые неизвестные матрицы $Q(\tau, \varepsilon)$ и $F(\tau, \varepsilon)$ так, что

$$U(\tau, \varepsilon) = E + Q(\tau, \varepsilon), \tag{16}$$

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = A_0(\varepsilon) + F(\tau, \varepsilon), \tag{17}$$

$$A(\tau, \varepsilon) = A_0(\varepsilon) + H(\tau, \varepsilon), \tag{18}$$

$$Q(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}(\tau, \varepsilon) \\ Q_{21}(\tau, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$F(\tau, \varepsilon) = [F_1(\tau, \varepsilon), F_2(\tau, \varepsilon)], \tag{20}$$

$$H(\tau, \varepsilon) = \begin{pmatrix} H_{11}(\tau, \varepsilon) & H_{12}(\tau, \varepsilon) \\ H_{21}(\tau, \varepsilon) & H_{22}(\tau, \varepsilon) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$H(\tau, \varepsilon) = O(\tau^{-1}), \tag{22}$$

$F_j(\tau, \varepsilon)$ — $(p_j \times p_j)$-матрицы, $H_{jk}(\tau, \varepsilon)$ и $Q_{jk}(\tau, \varepsilon)$ — $(p_j \times p_k)$-матрицы. Из (22) следует

$$H_{jk}(\tau, \varepsilon) = O(\tau^{-1}). \tag{23}$$

Подставляя выражения (16) — (22) в (11), получаем

$$\varepsilon^\beta \frac{dQ}{d\tau} = \tau^q (A_0 Q - QA_0 + H - F + HQ - QF). \tag{24}$$

Отсюда имеем

$$F_j = H_{jj} + H_{jh} Q_{hj}, \quad h \neq j, \quad h, j = 1, 2, \tag{25}$$

$$\varepsilon^\beta \frac{dQ_{jk}}{d\tau} = \tau^q (A_{0j} Q_{jk} - Q_{jk} A_{0k} + H_{jk} + H_{jh} Q_{hk} - Q_{jk} F_k), \quad h \neq k. \tag{26}$$

Если матрицы Q_{jk}, F_j удовлетворяют уравнениям (25), (26), то соответствующие матрицы $U(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$ из (9), (10) удовлетворяют ДУ (11). Величину F_k можно исключить из (26). Тогда для Q_{jk} получаем нелинейное ДУ:

$$\varepsilon^\beta \frac{dQ_{jk}}{d\tau} = \tau^q (A_{0j} Q_{jk} - Q_{jk} A_{0k} + H_{jk} + H_{jh} Q_{hk} - Q_{jk} (H_{kk} + H_{kh} Q_{hk})), \ h \neq k. \tag{27}$$

Выкладки теоремы 1 показывают, что уравнение (27) можно формально удовлетворить степенным рядом

$$\sum_{r=1}^{\infty} Q_{jkr}(\varepsilon) \tau^{-r} \tag{28}$$

(здесь суммирование от $r=1$), поскольку эти выкладки можно повторить шаг за шагом, подставляя вместо $Q(\tau, \varepsilon)$ и $F(\tau, \varepsilon)$ формальные ряды $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tau^{-r} U_r(\varepsilon)$ и $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \tau^{-r} \Omega_r(\varepsilon)$. Обе части (27) представляются тогда в виде формальных рядов по τ^{-1}, а так как ряды $\sum\limits_{r=0}^{\infty} \tau^{-r} U_r(\varepsilon)$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} \tau^{-r} \Omega_r(\varepsilon)$ формально удовлетворяют (11), то ряды в обеих частях (27) должны быть тождественны. Это нужно учитывать, рассматривая уравнение (27).

Итак, определим Q_{jk} — решение уравнения (27) такое, что Q_{jk} имеет свойства, аналогичные свойствам $U(\tau, \varepsilon)$ из теоремы 1 и $Q_{jk}(\tau, \varepsilon) = O(\tau^{-1})$ в области (2). Тогда F_j определятся из (25) и теорема 1 будет доказана.

Ввиду того, что уравнение (27) можно представить в виде нелинейного векторного уравнения, мы и проведем доказательство существования решения уравнения (27), следуя [8, 12], для более общего случая.

2. Рассмотрим систему

$$\varepsilon^{\beta} \frac{dx}{d\tau} = \tau^{q} f(\tau, x, \varepsilon), \quad \tau = \varepsilon^{\beta} t, \tag{29}$$

x — n-мерный вектор. Компоненты вектора f предполагаются голоморфными и ограниченными по τ, x, ε в области $\Pi_\tau \times \Pi_\varepsilon \times \Pi_x$, $\Pi_x = \{x : \|x\| \leqslant \delta\}$. Дополнительно предполагаем, что $f(\tau, x, \varepsilon)$ допускает в $\Pi_\tau \times \Pi_x$ равномерное асимптотическое разложение

$$f(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \hat{f}_h(\tau, x), \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \in \Pi_\varepsilon \tag{30}$$

с $\hat{f}_h$, голоморфными и ограниченными в $\Pi_\tau \times \Pi_x$. Пусть

$$f(\tau, x, \varepsilon) = f_0(\tau, \varepsilon) + A(\tau, \varepsilon) x + \sum_{|p| \geqslant 2} x^p f_p(\tau, \varepsilon) \tag{31}$$

есть разложение $f(\tau, x, \varepsilon)$ по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $A(\tau, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матрица, f_0 и f_p — n-мерные векторы, $x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$, $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ p_i — неотрицательные целые числа. Коэффициенты f_0, f_p и $A(\tau, \varepsilon)$ — голоморфные и ограниченные по τ, ε в $\Pi_\tau \times \Pi_\varepsilon$. Пусть

$$f_0(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} f_{0k}(\varepsilon), \quad f_p(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} f_{pk}(\varepsilon), \quad A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} A_k(\varepsilon)$$

— их разложения по степеням τ^{-1}. Так как $f(\tau, x, \varepsilon)$ допускает равномерное асимптотическое разложение (30), то f_{0k}, f_{pk}, A_k допускают асимптотические разложения

$$f_{0k}(\varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h f_{0kh}, \quad f_{pk}(\varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h f_{pkh}, \quad A_k(\varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h A_{kh},$$

$$k = 0, 1, \ldots, p \geqslant 2.$$

Чтобы уравнение (29) соответствовало уравнению (27) считаем, что $f_{00}(\varepsilon) \equiv 0$ и A_{00} имеет блочно-диагональную структуру (6) с ненулевыми собственными значениями.

Пусть $\omega = \arg \tau$, $\omega_j = \arg \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим через $D(L, \gamma, r)$ область

$$\begin{cases} (2r - 3/2)\pi + \gamma \leqslant \omega_j + (q+1)\omega \leqslant (2r + 3/2)\pi - \gamma, \\ |\tau| \geqslant L, \end{cases}$$

где r — целое, $L > 0$ — достаточно большая постоянная, $\gamma > 0$ — достаточно малая постоянная. Для любого j существует по меньшей мере одно целое r_j такое, что отрезок действительной прямой, определяемый как $\tau >$

$> L$ в плоскости τ, содержится во внутренности $D_j(L, \gamma, r_j)$. Положим $D(L, \gamma) = \bigcap_{j=1}^{n} D_j(L, \gamma, r_j)$.

Теорема 2. *Для достаточно больших τ существует решение системы* (29)

$$x = U(\tau, \varepsilon) \tag{32}$$

такое, что $U(\tau, \varepsilon)$ голоморфна по τ, ε в области $D(L, \gamma) \times \Pi_\varepsilon$ и допускает равномерное асимптотическое разложение

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} U_k(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \in \Pi_\varepsilon$ и $\tau \to \infty$ по области $D(L, \gamma)$, где $U_k(\varepsilon)$ голоморфны по ε и допускают асимптотическое разложение

$$U_k(\varepsilon) = \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h U_{kh}, \quad \varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \in \Pi_\varepsilon \tag{33}$$

(U_{kh} — *постоянные векторы*).

Доказательство. Пусть

$$x = Q(\tau, \varepsilon) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} U_k(\varepsilon) \tag{34}$$

представляется формальным рядом по степеням τ^{-k}. В силу (31) представим уравнение (29) в виде

$$\varepsilon^\beta \frac{dx}{d\tau} = \tau^q \left\{ A_0(\varepsilon) x + f_0(\tau, \varepsilon) + (A(\tau, \varepsilon) - A_0(\varepsilon)) x + \sum_{|p| \geqslant 2} x^p f_p(\tau, \varepsilon) \right\}. \tag{35}$$

Подставляя (34) в (35), получаем

$$\varepsilon^\beta \frac{dQ}{d\tau} = \tau^q \left\{ A_0(\varepsilon) Q + f_0(\tau, \varepsilon) + (A(\tau, \varepsilon) - A_0(\varepsilon)) Q + \sum_{|p| \geqslant 2} \{Q\}^p f_p(\tau, \varepsilon) \right\}.$$

Так как $dQ/d\tau = -k \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k-1} U_k(\varepsilon)$, то вводя обозначение

$$(A(\tau, \varepsilon) - A_0(\varepsilon)) Q + \sum_{|p| \geqslant 2} \{Q\}^p f_p(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{\infty} \tau^{-k} G_k(\varepsilon),$$

определяем U_k последовательно из уравнений

$$\begin{cases} A_0(\varepsilon) U_1 + f_{01}(\varepsilon) = 0, \\ A_0(\varepsilon) U_k + f_{0k}(\varepsilon) + G_k(\varepsilon) + (k - q - 1) \varepsilon^\beta U_{k-q-1}(\varepsilon) = 0, \end{cases}$$

где $U_{k-q-1} \equiv 0$, если $k \leqslant q + 1$. Поскольку $\det A_0(\varepsilon) \neq 0$ при достаточно малых ε и α, то $U_k(\varepsilon)$ можно определить голоморфными и допускающими асимптотические разложения (33).

Итак, формальные ряды (34) удовлетворяют уравнению (29) и являются формальными решениями уравнения (29). По теоремам 8.8. и 9.3 Вазова [12, с. 55; 60] при некоторых Δ и L существует вектор-функция $\tilde{U}(\tau, \varepsilon)$ такая, что $\tilde{U}(\tau, \varepsilon)$ голоморфная по τ, ε в области $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon$ ($\Pi_{\tau\Delta} = \{\tau : |\tau| \geqslant L, \arg \tau \leqslant \Delta\}$), допускает равномерное асимптотическое разложение вместе со своей производной и такая, что

$$\tilde{U}(\tau, \varepsilon) \approx Q(\tau, \varepsilon), \quad d\tilde{U}(\tau, \varepsilon)/d\tau \approx dQ(\tau, \varepsilon)/d\tau \tag{36}$$

при $\tau \to \infty$ в области $\tau \in \Pi_{\tau\Delta}$, где $Q(\tau, \varepsilon)$ — формальное решение уравнения (29), построенное выше.

Положим

$$x = z + \tilde{U}(\tau, \varepsilon). \tag{36'}$$

Тогда в области $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{1z}$ $(D_{1z} = \{z : \|z\| \leqslant \delta - \|\tilde{U}(\tau, \varepsilon)\|\}$ имеем

$$\varepsilon^\beta \frac{dz}{d\tau} = \tau^q g(\tau, z, \varepsilon), \tag{37}$$

где

$$g(\tau, z, \varepsilon) = f(\tau, z + \tilde{U}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon^\beta \tau^{-q} \frac{d\tilde{U}(\tau, \varepsilon)}{d\tau}.$$

Из (36) следует

$$\tilde{U}(\tau, \varepsilon) = O(\tau^{-1}). \tag{38}$$

Тогда можно выбрать Δ и L таким образом, чтобы область $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{2z}$ $(D_{2z} = \{z : \|z\| \leqslant 1/2\delta\})$ содержалась в области $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{1z}$ и чтобы по меньшей мере одна область $D(L, \gamma)$ содержалась во внутренней области $\Pi_{\tau\Delta}$. Теперь в $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{2z}$ имеем

$$g(\tau, z, \varepsilon) = \Omega(\tau, \varepsilon) z + g_0(\tau, \varepsilon) + \sum_{|p| \geqslant 2} g_p(\tau, \varepsilon) z^p.$$

Здесь Ω, g_0, g_p — голоморфны по τ, ε в $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon$. В частности, имеем

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = f_x(\tau, \tilde{U}(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$g_0(\tau, \varepsilon) = f(\tau, \tilde{U}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon^\beta \tau^{-q} \frac{d\tilde{U}(\tau, \varepsilon)}{d\tau},$$

где f_x обозначает якобиан матрицы f по x. Из (38) следует $\Omega(\tau, \varepsilon) = A(\tau, \varepsilon) + O(\tau^{-1})$, что означает $\Omega(\tau, \varepsilon) = A_{00} + O(|\varepsilon| + |\tau|^{-1})$. С другой стороны, так как Q — формальное решение уравнения (29), имеем $g_0(\tau, \varepsilon) \approx 0$ равномерно в области Π_ε при $\tau \to \infty$ в области $\Pi_{\tau\Delta}$.

Пусть Λ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Так как A_{00} имеет блочно-диагональный вид (6), то можно допустить, что величина элементов матрицы $A_{00} - \Lambda$ настолько мала, что $\|A_{00} - \Lambda\| \leqslant (q + 1)/2K$, где $K > 0$ — постоянная, которую определим ниже.

Из (37) имеем

$$\varepsilon^\beta \frac{dz}{d\tau} = \tau^q [\Lambda z + R(\tau, z, \varepsilon)]. \tag{39}$$

Здесь $R(\tau, z, \varepsilon) = g(\tau, z, \varepsilon) - \Lambda z$. Если выбрать положительные постоянные ε, δ, α достаточно малыми, то в $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{2z}$ получим при любых положительных целых m неравенство

$$\|R(\tau, z, \varepsilon)\| \leqslant \gamma \|z\| + b_m |\tau|^{-(m+1)}, \tag{40}$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, такая, что

$$\gamma < (q + 1)/K, \tag{41}$$

$b_m > 0$ — постоянная зависящая от m. Далее получаем

$$\|R(\tau, z, \varepsilon) - R(\tau, \tilde{z}, \varepsilon)\| \leqslant \gamma \|z - \tilde{z}\|, \tag{42}$$

если (τ, z, ε), $(\tau, \tilde{z}, \varepsilon)$ находятся в $\Pi_{\tau\Delta} \times \Pi_\varepsilon \times D_{2z}$.

Систему (39) можно записать в виде системы интегральных уравнений

$$z_j = \int_{L_{j\tau}} \varepsilon^{-\beta} t^q R_j(t, z, \varepsilon) \exp\left\{\frac{\lambda_j}{\varepsilon^\beta (q + 1)} (\tau^{q+1} - t^{q+1})\right\} dt, \tag{43}$$

где R_j — компоненты вектора R (τ, z, ε), $L_{j\tau}$ — путь интегрирования, начинающийся от τ. Наша задача — доказать существование решения z интегральных уравнений (43), асимптотически равного нулю: $z \simeq 0$ при $\tau \to \infty$ по области $D(L, \gamma)$. Тогда из (43) можно получить, согласно (36), решение уравнения (29), удовлетворяющее условиям теоремы. Для этого соответствующим образом выбираем пути интегрирования и получаем следующее неравенство [12].

Пусть $\xi = \tau^{q+1}$ является образом переменного τ. Обозначим через Σ область плоскости ξ, соответствующую D, а через $L_{j\xi}$ кривую в Σ, соответствующую $L_{j\tau}$.

Лемма. *Существуют положительные постоянные K, γ, α такие, что имеет место оценка*

$$\int\limits_{L_{j\xi}} |s|^{-v} \left| \exp\left(-\frac{\lambda_j}{\varepsilon^\beta (q+1)} s\right)\right| |ds| \leqslant K |\varepsilon|^\beta |\xi|^{-v} \left|\exp\left(-\frac{\lambda_j}{\varepsilon^\beta (q+1)}\xi\right)\right|,$$

$$j = 1, \ldots, n, \tag{44}$$

при любом положительном v в областях $\xi \in \Sigma(L_v) \times \Pi_\varepsilon$, где L_v — достаточно большая положительная постоянная, зависящая только от v.

Возьмем m достаточно большое. Обозначим

$$v = (m+1)/(q+1), \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{45}$$

и для простоты опустим индекс j. Последовательные приближения для искомой функции z определим по формуле

$$z_{r+1} = \int\limits_{L_\tau} \varepsilon^{-\beta} t^q R(t, z_r, \varepsilon) \exp\left\{\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta (q+1)} (\tau^{q+1} - t^{q+1})\right\} dt, \quad r = 0, 1, \ldots.$$

При $z_0 \equiv 0$ из (40) получим оценку

$$\| R(\tau, 0, \varepsilon) \| \leqslant b_m |\tau|^{-(m+1)}.$$

Тогда, используя (44), находим

$$|z_1| \leqslant \frac{b_m K}{q+1} |\tau|^{-v}. \tag{46}$$

Аналогично

$$|z_2 - z_1| \leqslant \frac{b_m \gamma K^2}{(q+1)^2} |\tau|^{-v},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|z_{r+1} - z_r| \leqslant \frac{b_m \gamma^r K^{r+1}}{(q+1)^{r+1}} |\tau|^{-v}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{47}$$

$$|z_{r+1}| \leqslant \frac{b_m K}{q+1} \frac{1}{1 - \gamma K} |\tau|^{-v}, \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{48}$$

В силу (46) неравенства (47), (48) справедливы для $r = 0$, поскольку $z_0 \equiv 0$. Доказательство того, что существует $\lim\limits_{r\to\infty} z_r = z(\tau, \varepsilon)$, можно провести известным путем: из (41), и (47) следует, что ряд $\sum\limits_{r=0}^{\infty} (z_{r+1} - z_r)$ сходится равномерно, а это значит, что существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} z_r = \lim\limits_{r\to\infty} \sum\limits_{s=0}^{r-1} (z_{s+1} - z_s)$ и предельная функция z является голоморфной по τ. Легко убедиться, что z удовлетворяет интегральному уравнению, опираясь на равномерную сходимость и неравенство (44). Наконец, из (48) видно, что $z(\tau, \varepsilon) \approx 0$ при $\tau \to \infty$, так как m в (45) произвольно. Кроме того, при фиксированном m имеем $z(\tau, \varepsilon) = O(|\tau|^{-(m+1)})$. Это завершает доказательство теоремы.

Отметим, что к таким ДУ сводится целый ряд задач практического характера (см., например, [14, с. 159—170]).

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 228 с.
3. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Расщепление некоторых систем дифференциальных уравнений.— В кн. : Приближенные методы математического анализа. Киев : Киев. пед. ин-т, 1979, с. 124—133.
4. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое расщепление некоторых классов сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.— В кн. : Всесоюз. конф. по асимптот. методам в теории сингуляр.- возмущ. уравнений, Алма-Ата, июнь 1979 г. : Тез. докл. Алма-Ата : Наука, 1979, ч. 1, с. 185—186.
5. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 48 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 80.3).
6. *Хапаев М. М.* Асимптотические разложения решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами при старших производных в окрестности иррегулярной особой точки.— Докл. АН СССР, 1960, **15**, № 6, с. 1338—1341.
7. *Хапаев М. М.* Асимптотика в окрестности иррегулярной особой точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми коэффициентами при старших производных.— Мат. сб., 1962, 57 / **99**, № 2, с. 187—200.
8. *Wasow W.* Connection problems for asymptotic series.— Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**, N 5, p. 831—853.
9. *Давидюк Г. П.* Интегрирование систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев : Киев. пед. ин-т, 1980, с. 53—56.
10. *Давидюк Г. П.* Построение решений для систем линейных дифференциальных уравнений с особенностями по переменной и по малому параметру.— Киев, 1982.— 23 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 263 У-Д83 Деп.
11. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1983.— 352 с.
12. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
13. *Wasow W.* On the analytic validity of formal simplifications of linear differential equations. II.— Funkc. ekvacioj, 1967, **10**, p. 107—122.
14. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек.— М. : Машиностроение, 1966.— 508 с.

Киев. инж.-строит. ин-т Получено 01.06.84