УДК 517.949.2

Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, А. И. Юрчик

Задача управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$d^2x(t)/dt^2 = f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)}), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, причем $f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)})$ периодична по t с периодом ω, $0 \leqslant \Delta \leqslant \omega$.

Поставим задачу: отыскать управления $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ таким образом, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1) было периодическим по t с периодом ω и удовлетворяло условиям

$$x(0) = x_0, \quad dx(0)/dt = x_1, \quad x_0, x_1 \in E_n. \qquad (2)$$

При решении поставленной задачи будем применять численно-аналический метод [1—3].

Для непрерывной на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \omega$ функции $f(t)$ введем операторы $L, \overline{L}, L^2, \overline{L^2}$ с помощью соотношений

$$Lf(t) = \int_0^t [f(t) - \overline{f(t)}]\, dt = (1 - t/\omega) \int_0^t f(s)\, ds - (t/\omega) \int_t^\omega f(s)\, ds,$$

$$\overline{L}f(t) = (1 - t/\omega) \int_0^t f(s)\, ds + (t/\omega) \int_t^\omega f(s)\, ds, \qquad (3)$$

$$L^2 f(t) = L(Lf(t)) = \int_0^t \left(\int_0^t (f(s) - \overline{f(s)})\, ds - \int_0^t \overline{(f(s) - \overline{f(s)})\, ds} \right) dt =$$

$$= (1 - t/\omega) \int_0^t Lf(s)\, ds - (t/\omega) \int_t^\omega Lf(s)\, ds,$$

$$\overline{L}^2 f(t) = (1 - t/\omega) \int_0^t \overline{L}f(s)\, ds + (t/\omega) \int_t^\omega \overline{L}f(s)\, ds,$$

где $\overline{f(t)} = \omega^{-1} \int_0^\omega f(s)\, ds$.

Согласно леммам 3.1, 3.2 из работы [1], для этих операторов верны оценки

$$\|Lf(t)\| = \|\overline{L}f(t)\| \leqslant \alpha_1(t)\|f(t)\|, \quad \|L^2 f(t)\| = \|\overline{L}^2 f(t)\| \leqslant (\omega/3)\,\alpha_1(t)\|f(t)\|, \tag{4}$$

где $\alpha_1(t) = 2t(1 - t/\omega)$, причем $\alpha_1(t) \leqslant \omega/2$, при $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$x(t) = x_0 + L^2 f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)}), \tag{5}$$

продифференцировав которую, найдем

$$dx(t)/dt = Lf(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)}) -$$
$$- \overline{L}f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)}). \tag{6}$$

Если предположить, что выполняются равенства

$$\omega^{-1}\int_0^{\omega} f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt, dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)})\,dt = 0, \tag{7}$$

$$dx(0)/dt = -\omega^{-1}\int_0^{\omega}\left[\int_0^t f(t, x(t), x(t-\Delta), dx(t)/dt,\right.$$
$$\left. dx(t-\Delta)/dt, u^{(1)}, u^{(2)})\,dt\right]dt, \tag{8}$$

то получим равенство

$$x(t) = x_0 + dx(0)/dt + \int_0^t\int_0^t f(s, x(s), x(s-\Delta), dx(s)/ds, \quad dx(s-\Delta)/ds,$$
$$u^{(1)}, u^{(2)})\,ds\,dt, \tag{9}$$

из которого следует, что $x(t)$, являясь периодическим решением системы (5), будет также периодическим решением системы (1), удовлетворяющим начальным условиям (2).

Таким образом, поставленную задачу можно заменить следующей: найти периодические решения систем (5), (6) и управления $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, удовлетворяющие соотношениям (7), (8).

Пусть правая часть системы (1) определена в области D:

$$-\infty < t < \infty, \ a \leqslant x(t) \leqslant b, \ a \leqslant x(t-\Delta) \leqslant b, \ c \leqslant y = dx(t)/dt \leqslant d,$$
$$c \leqslant y(t-\Delta) = dx(t-\Delta)/dt \leqslant d, \ |u^{(1)}| \leqslant \rho_1, \ |u^{(2)}| \leqslant \rho_2, \tag{10}$$

непрерывна по совокупности переменных t, x, x_Δ, y, y_Δ, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta, u^{(1)}, u^{(2)})| \leqslant M, \tag{11}$$

$$|f(t, x', x'_\Delta, y', y'_\Delta, u_1^{(1)}, u_1^{(2)}) - f(t, x'', x''_\Delta, y'', y''_\Delta, u_2^{(1)}, u_2^{(2)})| \leqslant$$
$$\leqslant K_1|x' - x''| + K_2|x'_\Delta - x''_\Delta| + K_3|y' - y''| + K_4|y'_\Delta - y''_\Delta| +$$
$$+ K_5 \max\{|u_1^{(1)} - u_2^{(1)}|; |u_1^{(2)} - u_2^{(2)}|\}, \tag{12}$$

где M — n-мерный вектор с неотрицательными координатами, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 — $(n \times n)$-мерные матрицы с неотрицательными элементами, a, b, c, d, ρ_1, $\rho_2 \in E_n$.

Введем следующие обозначения:

$$u = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \int_0^t f(s)\,ds \end{pmatrix}, \quad m_1 = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega x_1 \end{pmatrix},$$

где $\theta \in E_n$ — нуль-вектор.

Тогда систему (5), (6) и равенства (7), (8) можно заменить эквивалентной системой

$$x(t) = x_0 + L^2 f(t, x(t), x(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), u),$$
$$y(t) = y_0 + Lf(t, x(t), x(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), u), \tag{13}$$

$$\int_0^\omega F(t; x(t), x(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), u)\, dt + m_1 = 0. \tag{14}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) множества $D_1 = [a + \omega^2 M/6,\ b - \omega^2 M/6]$, $D_2 = [c + \omega M/2,\ d - \omega M/2]$ не пусты, причем $x_0 \in D_1$, $x_1 \in D_2$;

б) существует постоянная $(2n \times 2n)$-мерная обратимая матрица A такая, что при любых $x, x_\Delta, y, y_\Delta, \bar{u}, u$ из области D выполняются неравенства

$$\left\| \int_0^\omega [F(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta, \bar{u}) - F(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta, u)]\, dt - A(\bar{u} - u) \right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \| \bar{u} - u \|_2; \tag{15}$$

в) $\varepsilon \| A^{-1} \|_2 < 1,\ m_2 \| A^{-1} \|_2 \leqslant (1 - \varepsilon \| A^{-1} \|_2)\rho,$ (16)

где $\rho = \left\| \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \right\|_2$, $m_2 = \left\| \begin{pmatrix} M\omega \\ M\omega^2/2 \end{pmatrix} \right\|_2$, символы $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_2$ обозначают нормы в пространствах E_n и E_{2n} соответственно.

Теорема. *Пусть вектор-функция* $f(t, x, x_\Delta, y, y_\Delta, u^{(1)}, u^{(2)})$ *определена в области* (10), *непрерывна по* $t, x, x_\Delta, y, y_\Delta, u^{(1)}, u^{(2)}$, *периодична по* t *с периодом* ω, *удовлетворяет неравенствам* (12) *и выполняются условия а) — в). Предположим, что собственные числа матрицы*

$$Q = \begin{pmatrix} \omega^2(\|K_1\| + \|K_2\|)/6 & \omega^2(\|K_3\| + \|K_4\|)/6 & \omega^2\|K_5\|/6 \\ 2^{-1}\omega(\|K_1\| + \|K_2\|) & 2^{-1}\omega(\|K_3\| + \|K_4\|) & \omega\|K_5\|/2 \\ \max(\omega; \omega^2/2)\|A^{-1}\|_2(\|K_1\| + \|K_2\|) & \max(\omega; \omega^2/2)\|A^{-1}\|_2(\|K_3\| + \|K_4\|) & \varepsilon\|A^{-1}\|_2 \end{pmatrix}$$

лежат в круге единичного радиуса.

Тогда последовательность периодических по t *с периодом* ω *функций*

$$x_{k+1}(t) = x_0 + L^2 f(t, x_k(t), x_k(t-\Delta), y_k(t), y_k(t-\Delta), u_k), \tag{17}$$
$$y_{k+1}(t) = x_1 + Lf(t, x_k(t), x_k(t-\Delta), y_k(t), y_k(t-\Delta), u_k) \tag{18}$$

и последовательность

$$u_{k+1} = u_k - A^{-1}\left[\int_0^\omega F(t, x_k(t), x_k(t-\Delta), y_k(t), y_k(t-\Delta), u_k)\, dt + m_1\right] \tag{19}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t) = x_0$, $y_0(t) = x_1$, $u_0 = \theta_1$, $\theta_1 \in E_{2n}$ — *нуль-вектор*) *сходятся равномерно при* $k \to \infty$ *к единственному периодическому по* t *с периодом* ω *решению задачи* (1), (2), *определенному в области* (10).

Доказательство. Очевидно, что функции последовательностей (17), (18) периодичны по t с периодом ω. Покажем, что $x_k(t)$, $y_k(t)$, u_k для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ принимают при $-\infty < t < \infty$ значения в области (10). Действительно, при $k = 0$ в силу неравенств (4) и представления (17), (18) получаем

$$|x_1(t) - x_0| \leqslant \bar{L}^2 |f(t, x_0; x_0, y_0, y_0, 0)| \leqslant \alpha_1(t) M\omega/3 \leqslant M\omega^2/6, \tag{20}$$

$$|y_1(t) - y_0| \leqslant \bar{L} |f(t, x_0, x_0, y_0, y_0, 0)| \leqslant \alpha_1(t) M \leqslant \omega M/2, \tag{21}$$

$$\|u_1\| \leqslant \left\| A^{-1}\left[\int_0^\omega F(t, x_0, x_0, y_0, y_0, 0)\, dt + m_1\right]\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1}\|_2 \max\{\|M\|\omega;\ 2^{-1}\omega^2\|M\| + \|x_1\|\} \leqslant \rho. \tag{22}$$

В силу периодичности функций $x_1(t)$, $y_1(t)$ из (20), (21) следуют неравенства

$$|x_1(t-\Delta)-x_0|\leqslant\omega^2 M/6,\quad |y_1(t-\Delta)-x_1|\leqslant M\omega/2. \tag{23}$$

Из неравенств (20) — (23) в силу условий а), б) следует

$$a\leqslant x_1(t)\leqslant b,\quad c\leqslant dx_1(t)/dt\leqslant d,\quad a\leqslant x_1(t-\Delta)\leqslant b, \tag{24}$$
$$c\leqslant dx_1(t-\Delta)/dt\leqslant d,\quad |u^{(1)}|\leqslant\rho_1,\quad |u^{(2)}|\leqslant\rho_2$$

при всех $-\infty<t<\infty$.

Предположим, что аналогичные неравенства выполняются для всех k, меньших некоторого целого m, $m\geqslant 1$, и $-\infty<t<\infty$. Учитывая рекуррентные соотношения (17)—(19), находим

$$|x_{m+1}(t)-x_0|\leqslant\overline{L}^2|f(t,x_m(t),x_m(t-\Delta),y_m(t),y_m(t-\Delta),u_m)|\leqslant M\omega^2/6, \tag{25}$$

$$|y_{m+1}(t)-x_1|\leqslant\overline{L}|f(t,x_m(t),x_m(t-\Delta),y_m(t),y_m(t-\Delta),u_m)|\leqslant M\omega/2, \tag{26}$$

$$\|u_{m+1}\|_2\leqslant\left\{\left\|Au_m\int\limits_0^\omega[F(t,x_m(t),x_m(t-\Delta),y_m(t),y_m(t-\Delta),u_m)-\right.\right.$$
$$\left.-F(t,x_m(t),x_m(t-\Delta),y_m(t),y_m(t-\Delta),0)]\,dt\right\|_2+$$
$$\left.+\left\|\int\limits_0^\omega F(t,x_m(t),x_m(t)-\Delta),y_m(t),y_m(t-\Delta),0)\,dt+m_1\right\|_2\right\}\|A^{-1}\|_2\leqslant$$
$$\leqslant(\varepsilon\rho+m_2)\|A^{-1}\|_2\leqslant\rho, \tag{27}$$

откуда следует, что $x_m(t)$, $y_m(t)$, u_m принадлежат области (10), если только $x_0\in D_1$, $x_1\in D_2$.

Согласно методу полной математической индукции заключаем, что для всех $k=0,1,2,3,\ldots,-\infty<t<\infty$, $x_0\in D_1$, $x_1\in D_2$ последовательности $x_k(t)$, $y_k(t)$, u_k принадлежат области (10).

Для доказательства сходимости последовательностей (17)—(19) оценим разности $x_2(t)-x_1(t)$, $y_2(t)-y_1(t)$, u_2-u_1. Имеем

$$\|x_2(t)-x_1(t)\|\leqslant\|L^2[f(t,x_1(t),x_1(t-\Delta),y_1(t),y_1(t-\Delta),u_1)-$$
$$-f(t,x_0,x_0,y_0,y_0,0)]\|\leqslant 3^{-1}\omega\alpha_1(t)[\|K_1\|\|x_1(t)-x_0\|+\|K_2\|\|x_1(t-\Delta)-$$
$$-x_0\|+\|K_3\|\|y_1(t)-x_1\|+\|K_4\|\|y_1(t-\Delta)-x_1\|+\|K_5\|\|u_1\|]\leqslant$$
$$\leqslant 6^{-1}\omega^2[\|K_1\|\omega^2/6+\|K_2\|\omega^2/6+\|K_3\|\omega/2+\|K_4\|\omega/2+$$
$$+\|K_5\|m_2\|M\|^{-1}\|A^{-1}\|]\|M\|, \tag{28}$$

$$\|y_2(t)-y_1(t)\|\leqslant\|L[f(t,x_1(t),x_1(t-\Delta),y_1(t),y_1(t-\Delta),u_1)-$$
$$-f(t,x_0,x_0,y_0,y_0,0)]\|\leqslant\alpha_1(t)[\|K_1\|\|x_1(t)-x_0\|+\|K_2\|\|x_1(t-\Delta)-$$
$$-x_0\|+\|K_3\|\|y_1(t)-x_1\|+\|K_4\|\|y_1(t-\Delta)-x_1\|+\|K_5\|\|u_1\|]\leqslant$$
$$\leqslant 2^{-1}\omega[(\|K_1\|+\|K_2\|)\omega^2/6+(\|K_3\|+\|K_4\|)\omega/2+$$
$$+\|K_5\|m_2\|M\|^{-1}\|A^{-1}\|]\|M\|, \tag{29}$$

$$\|u_2-u_1\|_2\leqslant\left\{\left\|Au_1-\int\limits_0^\omega[F(t,x_1(t),x_1(t-\Delta),y_1(t),y_1(t-\Delta_1),u_1)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-F(t,x_0,x_0,y_0,y_0,0)]\,dt\right\|_2\right\}\|A^{-1}\|_2\leqslant\left\{\|Au_1-\int\limits_0^\omega[F(t,x_1(t),x_1(t-\Delta),\right.$$

$$y_1(t),\ y_1(t-\Delta),\ u_1) - F(t,\ x_1(t),\ x_1(t-\Delta),\ y_1(t),\ y_1(t-\Delta),\ 0)]\,dt\,\|_2\Big\}\,\|A^{-1}\|_2 +$$

$$+\left\{\left\|\int_0^{\omega}[F(t,\ x_1(t),\ x_1(t-\Delta),\ y_1(t),\ y_1(t-\Delta),\ 0)\ -\right.\right.$$

$$\left.\left.- F(t,\ x_0,\ x_0,\ y_0,\ y_0,\ 0)]\,dt\right\|_2\right\}\|A^{-1}\|_2 \leqslant \Big\{\varepsilon\|u_1\|_2 + \int_0^{\omega}[\|K_1\|\,\|x_1(t) - x_0\| +$$

$$+\|K_2\|\,\|x_1(t-\Delta) - x_0\| + \|K_3\|\,\|y_1(t) - x_1\| +$$

$$+\|K_4\|\,\|y_1(t-\Delta) - x_1\|]\,dt\Big\}\,\|A^{-1}\|_2 \leqslant \{\varepsilon\max\omega\,(\|M\|,\ \omega\|M\|/2 + \|x_1\|) +$$

$$+\max(\omega,\ 2^{-1}\omega^2)\,[(\|K_1\| + \|K_2\|)\,\omega^2/6 + (\|K_3\| + \|K_4\|)\,\omega/2]\,\|M\|\}\,\|A^{-1}\|_2. \tag{30}$$

Методом полной математической индукции можно показать, что выполняются неравенства

$$v_{k+1} = \max_{t\in[0,\omega]}\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| = \max_{t\in[0,\omega]}\|x_{k+1}(t-\Delta) - x_k(t-\Delta)\| \leqslant$$

$$\leqslant \omega^2\,((\|K_1\| + \|K_2\|)\,r_k/6 + (\|K_3\| + \|K_4\|)\,w_k + \|K_5\|\,l_k), \tag{31}$$

$$w_{k+1} = \max_{t\in[0,\omega]}\|y_{k+1}(t) - y_k(t)\| = \max_{t\in[0,\omega]}\|y_{k+1}(t-\Delta) - y_k(t-\Delta)\| \leqslant$$

$$\leqslant \omega/2\,((\|K_1\| + \|K_2\|)\,r_k + (\|K_3\| + \|K_4\|)\,w_k + \|K_5\|\,l_k), \tag{32}$$

$$l_{k+1} = \|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \|A^{-1}\|_2\,\{\max(\omega,\ 2^{-1}\omega^2)\,((\|K_1\| + \|K_2\|)\,v_k +$$

$$+ (\|K_3\| + \|K_4\|)\,w_k + \varepsilon l_k)\}, \tag{33}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots,$ причем $v_1 \leqslant \omega^2\|M\|/6$, $w_1 \leqslant \omega\|M\|/2$, $l_1 \leqslant \omega\max\{\|M\|,$ $2^{-1}\omega\|M\| + \|x_1\|\}$, которые можно записать в виде

$$z_{k+1} \leqslant Qz_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{34}$$

где

$$z_{k+1} = \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ w_{k+1} \\ l_{k+1} \end{pmatrix}, \qquad z_1 \leqslant z_0 + \begin{pmatrix} \omega^2\|M\|/6 \\ \omega\|M\|/2 \\ \omega\max(\|M\|;\ \omega\|M\|/2 + \|x_1\|) \end{pmatrix}.$$

Итерируя неравенство (34), получаем

$$z_{k+1} \leqslant Q^k z_1, \tag{35}$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} z_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} Q^{i-1} z_1. \tag{36}$$

Так как собственные значения матрицы Q лежат в круге единичного радиуса, то ряд (36) равномерно сходится:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} Q^{i-1} z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{i-1} z_1 = (E - Q)^{-1} z_1. \tag{37}$$

Соотношение (37) означает равномерную сходимость последовательностей $x_k(t)$, $y_k(t)$, u_k:

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t), \quad \lim_{k\to\infty} y_k(t) = dx(t)/dt, \quad \lim_{k\to\infty} u_k = u. \tag{38}$$

Переходя в рекуррентных соотношениях (17)—(19) к пределу при $k \to \infty$, убеждаемся, что предельные функции $x(t)$, $dx(t)/dt$ являются решением задачи (1), (2). Единственность этого решения легко доказать методом от противного.

Отметим, что аналогичные вопросы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в работе [4].

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.— Укр. мат. журн., 1967, **19**, № 4, с. 125—132.
3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 247 с.
4. *Собкович Р. И.* О периодической задаче управления для систем дифференциальных уравнений второго порядка.— В кн.: Аналитические методы нелинейной механики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 125—133.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Киев. ун-т

Пол учено 26.11.84