УДК 517.53

В. В. Андриевский

О приближении функций на дугах с нулевыми углами

В статье получены некоторые оценки скорости полиномиального приближения функций, заданных на дугах комплексной плоскости $\mathbb{C}$. С идейной точки зрения эти результаты близки соответствующим результатам из [1—4], продолжают исследования работы [5] и частично анонсированы в [6].

Пусть L — конечная жорданова дуга, $\Omega = \mathbb{C} \setminus L$ — ее односвязное дополнение; функция $w = \Phi(z)$ конформно и однолистно отображает Ω на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ и нормирована условиями $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$.

В дальнейшем через $P_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, будем обозначать полином степени $\leqslant n$, а через $C, C_1, \ldots$ — неотрицательные константы, в различных соотношениях, вообще говоря, различные и независящие от фигурирующих, как правило, в неравенствах точек дуги L и натурального числа n.

Для $E \subset \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots, \delta > 0$ положим

$$d(\zeta, E) = \inf_{z \in E} |\zeta - z|, \; E_\delta = \{\zeta : d(\zeta, E) < \delta\},$$

$$U(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| < \delta\}, \; \partial U(\zeta, \delta) = \{z : |z - \zeta| = \delta\},$$

$$L_n = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 1 + 1/n\}, \; \delta_n = \sup_{\zeta \in \overline{\mathrm{int}\, L_n}} d(\zeta, L),$$

где под $\mathrm{int}\, L_n$ (L_n — конечная жорданова кривая) понимается конечная область, граница которой совпадает с L_n.

Пусть $\omega(\delta)$, $\delta > 0$, — функция типа модуля непрерывности. Обозначим через $H^\omega(L)$ класс непрерывных на L функций f, удовлетворяющих условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant C\omega(|z_1 - z_2|), \; z_1, z_2 \in L.$$

Будем также пользоваться стандартными обозначениями $H^\alpha(L) = H^{\delta^\alpha}(L)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\|f\|_{C(L)} = \sup_{z \in L} |f(z)|$.

Дугу L отнесем к классу S, если при $z \in L$ и $\delta > 0$

$$\theta(z, \delta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{mes}\,[L \cap U(z, \delta)] \leqslant C\delta \tag{1}$$

(символ mes обозначает длину).

Теорема 1. *Пусть $L \in S$, тогда $\forall f(z) \in H^\omega(L)$ $\exists \{P_n(z)\}_{n=1,2,\ldots}$ такие, что*

$$\|f - P_n\|_{C(L)} \leqslant C_1 \omega(\delta_n), \tag{2}$$

$$\|P_n\|_{C(L)} \leqslant C_2 \omega(\delta_n)/\delta_n. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно теореме 3 работы [5], достаточно убедиться в существовании такой константы $C_3 > 1$, что

$$(\mathbb{C} \setminus L_\delta) \cap U(z, C_3\delta) \neq \varnothing, \; z \in L, \; 0 < \delta < \delta_0 < 1. \tag{4}$$

Пусть $z \in L$, $C > 1$ — константа из соотношения (1). Символом mes_2 будем обозначать плоскую меру Лебега. Рассмотрим множество $L_\delta \cap U(z, C_3\delta)$, где $0 < \delta < (\mathrm{diam}\, L)/4C_3$ (выбор константы $C_3 > C + 1$ будет сделан ниже). Очевидно включение

$$L_\delta \cap U(z, C_3\delta) \subset \bigcup_{z \in L \cap U(z, (C_3+1)\delta)} U(z, \delta).$$

Множество $L \cap U(z, (C_3+1)\delta)$ состоит не более чем из счетного числа дуг. Из них лишь конечное число дуг $l_1, \ldots, l_m$ удовлетворяет условию $l_j \cap U(z, C_3\delta) \neq \varnothing$, $j=\overline{1, m}$. На каждом l_j, $j=\overline{1, m}$, выделим дугу $l'_j \subset \subset l_j$ с концами в точках z'_j и $z''_j \in \partial U(z, C_3\delta)$ так, чтобы

$$(l_j \setminus l'_j) \cap U(z, C_3\delta) = \varnothing, \; j=\overline{1, m}.$$

Очевидно $\operatorname{mes} l'_j \leqslant \operatorname{mes} l_j - 2\delta$. Разобьем каждую дугу l'_j, $j=\overline{1, m}$, на части следующим образом. Положим $\zeta_j^0 = z'_j$, в качестве ζ_j^1 возьмем первую при движении вдоль l'_j от точки ζ_j^0 точку пересечения $l'_j \cap \partial U(\zeta_j^0, \delta)$ и т. д. В качестве ζ_j^k возьмем первую при движении по l'_j от ζ_j^{k-1} к z''_j точку пересечения $l'_j \cap \partial U(\zeta_j^{k-1}, \delta)$. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не построим такую точку $\zeta_j^{n_j}$, что часть дуги l'_j, заключенная между точками $\zeta_j^{n_j}$ и z''_j, будет лежать в $\overline{U(\zeta_j^{n_j}, \delta)}$. По построению $n_j\delta \leqslant \operatorname{mes} l'_j$.

Рассмотрим множество $V_j = \bigcup\limits_{k=0}^{n_j} U(\zeta_j^k, 2\delta)$, $j=\overline{1, m}$. Для его площади имеем оценку

$$\operatorname{mes}_2 V_j \leqslant (n_j+1)\, 4\pi\delta^2 < 4\pi\delta \operatorname{mes} l_j.$$

В силу проведенных построений выполняется включение

$$L_\delta \cap U(z, C_3\delta) \subset [U(z, C_3\delta) \setminus U(z, (C_3-1)\delta)] \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\right).$$

Выбирая $C_3 = 4(1+2C)$, получаем

$$\operatorname{mes}_2 L_\delta \cap U(z, C_3\delta) \leqslant \pi\delta^2 (C_3^2 - (C_3-1)^2) + 4\pi\delta \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes} l_j \leqslant \pi\delta^2 (2C_3 - 1) +$$

$$+ 4\pi\delta^2 C (C_3+1) \leqslant 2\pi\delta^2 (C_3+1)(1+2C) < \pi\delta^2 C_3^2 = \operatorname{mes}_2 U(z, C_3\delta),$$

откуда следует соотношение (4).

В работе [5] для случая квазигладкой дуги L установлены неулучшаемость оценки (2) на каждом из классов Гельдера $H^\alpha(L)$, $0<\alpha<1$, и возможность обращения теоремы 1.

В данной статье исследуются те же вопросы, но уже в случае дуг с нулевыми углами, для которых неравенство (2), как отмечалось в [5], неожиданно.

Напомним, что дуга L называется квазигладкой, если для любых точек z и $\zeta \in L$ длина части $L(z, \zeta)$ дуги L, лежащей между ними, удовлетворяет неравенству $\operatorname{mes} L(z, \zeta) \leqslant C|z-\zeta|$.

Пусть z_1 и z_2 — концы дуги L. Положим

$$\Omega^1 = \{\zeta : \zeta \in \Omega, \; \arg \Phi(z_1) < \arg \Phi(\zeta) < \arg \Phi(z_2)\},$$

$$\Omega^2 = \Omega \setminus \overline{\Omega^1}; \; L_n^j = \Omega^j \cap L_n, \; j=1, 2; \; n = 1, 2, \ldots$$

Будем говорить, что $L \in B_\theta$, где $\theta(\delta)$, $\delta>0$, — положительная, неубывающая функция, $\theta(+0)=0$, если

1) $L = l^+ \cup l^-$, $l^+ \cap l^- = \{z_0\}$, $l^\pm$ — квазигладкая;

2) для точек $z \in l^\pm$, $0 < |z-z_0| < (\operatorname{diam} l^\mp)/2$, выполняются соотношения

$$d(z, l^\mp) \asymp \operatorname{diam} [\Omega^1 \cap \partial U(z_0, |z-z_0|)] \asymp |z-z_0|\, \theta(|z-z_0|).$$

Если $\theta(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha>0$, то соответствующий класс дуг будем обозначать через B_α.

Простейший пример дуги $L \in B_\theta$ — кусочно-гладкая дуга, отдельные части которой стыкуются в точке z_0 под нулевым углом (функция $\theta(\delta)$ характеризует порядок их касания).

Путем применения метода конформных инвариантов (см. [7]) несложно устанавливаются следующие метрические свойства отображающей функции Φ в случае $L \in B_\theta$.

Пусть $\mu(\delta) \stackrel{\text{df}}{=} \delta\theta(\delta)$, тогда

$$\delta_n \asymp \mu[d(z_0, L_n^1)], \; n = 1, 2, \ldots .$$

Если компактифицировать область Ω простыми концами по Каратеодори, то точка z_0 будет телом двух граничных простых концов Z_0^1 и Z_0^2, примыкающих соответственно к областям Ω^1 и Ω^2. Положим

$$\Gamma_j = \{\zeta : \zeta \in \Omega, \; \arg \Phi(\zeta) = \arg \Phi(Z_0^j)\}, \; j = 1, 2.$$

Имеет место соотношение

$$d(\zeta, L) \asymp |\zeta - z_0|, \; \zeta \in \Gamma_2. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $L \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, *тогда* $\forall \beta : 0 < \beta \leqslant 1$ $\exists f_\beta(z) \in H^\beta(L)$ *и* $C = C(L, \beta) = \mathrm{const} > 0$:

$$E_n(f_\beta, L) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{\{P_n\}} \|f_\beta - P_n\|_{C(L)} \geqslant C\delta_n^\beta, \; n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Доказательство. Сделаем предварительно следующее замечание. Пусть n — достаточно велико, $h_n \stackrel{\text{df}}{=} d(z_0, L_n^1)/2$. На окружности $\partial U(z_0, h_n)$ выделим дугу γ_1 (с концами в точках $\zeta^+ \in l^+$ и $\zeta^- \in l^-$), отделяющую простой конец Z_0^1 от ∞. Пусть $\gamma_2 \stackrel{\text{df}}{=} L(\zeta^+, \zeta^-)$, а l_n — наибольшая по длине дуга пересечения $\partial U(z_0, h_n) \cap \Omega^2$ с концами в точках $z^+ \in l^+$ и $z^- \in l^-$. Положим

$$\gamma_3 = l_n \cup L(z^+, \zeta^+) \cup L(z^-, \zeta^-).$$

При достаточно больших n справедливы соотношения

$$d(z_0, \gamma_3) \geqslant h_n/2, \; \sup_{z \in \gamma_3} |z - z_0| \leqslant 2h_n.$$

В качестве $f_\beta(z)$ возьмем любую из однозначных в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_1$ ветвей функции: $(z - z_0)^{\beta(1+\alpha)}$, если $\beta(1+\alpha)$ — нецелое, и $(z - z_0)^{\beta(1+\alpha)} \ln(z - z_0)$, если $\beta(1 + \alpha)$ — целое. Принадлежность $f_\beta(z) \in H^\beta(L)$ очевидна.

Пусть $P_n(z)$ таков, что

$$|f_\beta(z) - P_n(z)| \leqslant E_n(f_\beta, L), \; z \in L.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно рассмотреть случай, когда $E_n \stackrel{\text{df}}{=} E_n(f_\beta, L) \leqslant \delta_n^\beta \asymp h_n^{\beta(1+\alpha)}$. Тогда для $P_n(z)$ при $z \in L$ выполняется неравенство

$$|P_n(z)| \leqslant |f_\beta(z) - P_n(z)| + |f_\beta(z) - f_\beta(z_0)| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 h_n^{\beta(1+\alpha)} + C_2 |z - z_0|^\beta \leqslant C_3 h_n^\beta \left(1 + \left|\frac{z - z_0}{h_n}\right|^\beta\right).$$

Следовательно, согласно одному результату П. М. Тамразова (см., например, [5, 8, с. 418—426])

$$|P_n(z)| \leqslant C_4 h_n^\beta, \; z \in \gamma_1.$$

Возьмем точку $z \in \Gamma_2$ со свойством $|z - z_0| = \varepsilon h_n$ (выбор достаточно малого фиксированного числа $0 < \varepsilon < 1/2$ оговорен ниже). В силу соотношения (5) $d(z, \gamma_2) \asymp \varepsilon h_n$.

Пусть для начала $\delta \stackrel{\text{df}}{=} \beta(1 + \alpha)$ — нецелое, $k \stackrel{\text{df}}{=} [\delta] + 1$. При соответствующей ориентации дуг γ_j, $j = 1, 2, 3$, имеем

$$\frac{2\pi i}{k!} f_\beta^{(k)}(z) = \int_{\gamma_3} \frac{f_\beta(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{f_\beta(\zeta) - P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta + \int_{\gamma_1} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{2\pi i}{k!} f_\beta^{(k)}(z)\right| = \frac{2\pi}{k!}\delta\ldots(\delta-k+1)(\varepsilon h_n)^{\delta-k} \leqslant C_5(1-2\varepsilon)^{-k-1}h_n^{\delta-k} + C_6\varepsilon^{-k-1}h_n^{-k}E_n,$$

где константы C_5 и C_6 не зависят от ε. Фиксируя достаточно малое ε и полагая $C_7 = \pi\delta\ \ldots\ (\delta - k + 1)/k!$, получаем

$$C_6\varepsilon^{-\delta-1}h_n^{-\delta}E_n \geqslant 2C_7 - C_5(1-2\varepsilon)^{-k-1}\varepsilon^{k-\delta} \geqslant C_7,$$

откуда следует оценка (6).

При целом δ доказательство неравенства (6) аналогично рассмотренному случаю, если учесть, что

$$f_\beta^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k}[(z-z_0)^{k-1}\ln(z-z_0)] =$$

$$= (k-1)\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^{k-2}\ln(z-z_0)] = \frac{(k-1)!}{z-z_0},$$

и воспользоваться неравенством

$$\left|\int_{\gamma_3}\frac{f_\beta(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| \leqslant \left|\int_{\gamma_3\setminus l_n}\frac{f_\beta(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| +$$

$$+\left|\ln h_n\int_{\partial U(z_0,h_n)\setminus l_n}\frac{(\zeta-z_0)^\delta}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| + \left|\int_{l_n}\frac{(\zeta-z_0)^\delta\arg(\zeta-z_0)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_8(1-2\varepsilon)^{-k-1}(h_n^{\alpha-1}|\ln h_n| + h_n^{-1}).$$

Теорема 2 указывает на неулучшаемость оценки (2) для каждой дуги $L\in B_\alpha$, $\alpha>0$, и каждого класса Гельдера $H_\theta(L)$, $0<\beta\leqslant 1$. С другой стороны, хорошо известно, что ее недостаточно для конструктивного описания классов $H^\beta(L)$. Как показывает приводимая ниже теорема 3, недостающим для этих целей условием может служить дополнительная информация о приближающих функцию полиномах в виде соотношения (3).

Теорема 3. *Пусть $L\in B_\theta$. Для того чтобы $f(z)\in H^\omega(L)$, необходимо и достаточно существование последовательности полиномов $\{P_n(z)\}_{n=1,2\ldots}$, удовлетворяющих неравенствам* (2) *и* (3).

Доказательство. Так как $B_\theta\subset S$, то необходимость условий (2) и (3) для принадлежности $f(z)\in H^\omega(L)$ следует из теоремы 1. Достаточность устанавливается с помощью стандартных рассуждений. Действительно, пусть $|z-\zeta|<\varepsilon=\varepsilon(L)$ и z и ζ принадлежат одновременно одной из дуг $l^\pm$. Найдем натуральное n, исходя из условия $\delta_{n+1}<|z-\zeta|\leqslant\leqslant\delta_n$. Выполняются оценки

$$|f(z)-f(\zeta)|\leqslant|f(z)-P_n(z)| + \int_{L(z,\zeta)}|P_n'(\xi)||d\xi| +$$

$$+|f(\zeta)-P_n(\zeta)|\leqslant C_1\omega(\delta_n)\leqslant C_2\omega(|\zeta-z|). \tag{7}$$

Пусть теперь $z\in l^+$, $\zeta\in l^-$, $|z-z_0|=|\zeta-z_0|=d$. Натуральное n найдем из условия $d(z_0, L_{n+1}^1)\leqslant d< d(z_0, L_n^1)$. Из частей дуги L и окружности $\partial U(z_0, d)$ построим дугу

$$\gamma(z,\zeta)\subset\operatorname{int}L_n,\ \operatorname{mes}\gamma(z,\zeta)\leqslant C_3|z-\zeta|,$$

соединяющую эти точки. В силу неравенства Маркова — Бернштейна для полинома $P_n(z)$, удовлетворяющего неравенствам (2) и (3), выполняется также оценка

$$|P_n(\xi)|\leqslant C_4\omega(\delta_n)/\delta_n,\ \xi\in\gamma(z,\zeta).$$

Следовательно, и в этом случае имеют место неравенства (7) (с единственной заменой $L(z, \zeta)$ на $\gamma(z, \zeta)$).

Если $z \in l^+$ и $\zeta \in l^-$ — произвольные точки, то вводя в рассмотрение точку $\xi \in l^+$, для которой $|\xi - z_0| = |\zeta - z_0|$, и учитывая, что $|z - \xi| + |\zeta - \xi| \leqslant C_5 |z - \zeta|$, по-прежнему имеем

$$|f(z) - f(\zeta)| \leqslant |f(z) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(\zeta)| \leqslant C_6 \omega(|z - \zeta|).$$

В заключение отметим, что теоремы 1—3 несложно распространяются на области с внешними нулевыми углами на границе (см. [6]).

1. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, **15**, № 3, с. 219—242.
2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационная характеристика классов Липшица $W^r H^1 (r = 0, 1, 2, \ldots)$.— Anal. math., 1975, № 1, с. 19—30.
3. *Коновалов В. Н.* Аппроксимационные характеристики некоторых классов функций комплексной переменной.— В кн.: Методы теории приближения и их приложения. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 54—66.
4. *Мергелян С. Н.* Равномерное приближение функций комплексного переменного.— Успехи мат. наук, 1952, **7**, вып. 2, с. 31—122.
5. *Андриевский В. В.* Аппроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости.— Мат. сб., 1984, **125/167**, № 1/9, с. 70—87.
6. *Андриевский В. В.* Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов.— Киев, 1983.— 20 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; № 83-12).
7. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей.— Мат. сб., 1977, **102/144**, № 3, с. 331—361.
8. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977.— 512 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк Получено 17.12.84