УДК 517.52

Ю. Л. Носенко

Регулярность и аппроксимативные свойства средних типа Бернштейна — Рогозинского двойных рядов Фурье

Пусть $T^2 = \{(x, y): -\pi < x, y \leqslant \pi\}$, $f \in C(T^2)$ — функция двух переменных 2π-периодическая по каждой переменной,

$$f(x, y) \sim \sum_{k,l} c_{kl} e^{i(kx+ly)} \tag{1}$$

— ее ряд Фурье, c_{kl} — ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{i(kx+ly)}\}$. Пусть W_0 — некоторая ограниченная область из R^2, содержащая начало координат,

$$S_n(f; W_0, x, y) = \sum_{(k, l) \in nW_0} c_{kl} e^{i(kx+lg)}$$

— частичные суммы ряда (1), соответствующие W_0.

Средние

$$R_n(f; x, y) = \int_{R^2} S_n\left(f; W_0, x - \frac{\gamma u}{n}, y - \frac{\gamma v}{n}\right) d\mu(u, v) \tag{2}$$

называют средними типа Бернштейна—Рогозинского. В таком виде они введены и изучались Р. М. Тригубом [1]. Здесь $n \in N$, $\gamma \in R$, μ — конечная и нормированная борелева мера на R^2.

В дискретном случае (мера точек (u_k, v_k) равна α_k)

$$R_n(f; x, y) = \sum_k \alpha_k S_n\left(f; W_0, x - \frac{\gamma u_k}{n}, y - \frac{\gamma v_k}{n}\right). \tag{3}$$

В одномерном случае средние (2) рассмотрены В. Рогозинским и С. Н. Бернштейном при условии, что мера сосредоточена равномерно в двух точках (мера каждой точки равна 1/2). Изучались также и более общие средние (см. [2; 3, с. 586; 4—6]). Изучался и порядок приближения такими средними (см. [2, 3]). Точный порядок найден в [5]. Он разный для средних Бернштейна и Рогозинского (см. [7, с. 241]): $k = 1$, $k = 2$ соответственно.

В двумерном случае также имеется ряд работ по средним Бернштейна—Рогозинского. Прежде всего отметим, что регулярность одного частного случая R_n (W_0 — круг, а мера равномерно распределена по его границе ∂W_0) исследована в [8].

В работах [9—14] рассматривались прямоугольные средние Бернштейна—Рогозинского и некоторые их обобщения и в дискретном случае, изучалась регулярность соответствующих средних, а также оценка уклонений этих средних от порождающих их функций (на некоторых классах функций).

В настоящей работе изучается регулярность в $C(T^2)$ средних (2) (равномерная сходимость $R_n(f;\ x,\ y)$ к $f(x, y)$ при $n \to \infty$) в случае, когда W_0 — многоугольник, а мера дискретная. Кроме того двумерные средние Бернштейна и Рогозинского сравниваются с прямоугольными средними Рисса ряда (1) в смысле их аппроксимативных свойств. Результаты работы частично анонсированы в [15].

Средние (1) можно представить также в виде [1]

$$R_n(f; x, y) = \sum_{(k,l)\in Z^2} \varphi\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) c_{kl} e^{i(kx+ly)}, \tag{4}$$

где Z^2 — целочисленная решетка в R^2,

$$\varphi(x, y) = \chi_{W_0}(x, y) \int_{R^2} e^{-i\gamma(xu+yv)} d\mu(u, v) \tag{5}$$

($\chi_{W_0}(x, y)$ — характеристическая функция (индикатор) W_0).

Для регулярности (1) в $C(T^2)$ необходимо, если W_0 измеримо по Жордану в R^2, чтобы было [1]

$$\int_{R^2} e^{-i\gamma(xu+yv)} d\mu(u, v) = 0, \quad (x, y) \in \partial W_0. \tag{6}$$

1. Регулярность средних типа Бернштейна—Рогозинского. Рассмотрим многоугольник W_0, имеющий следующие свойства: 1) ни одна его сторона не лежит на прямой, проходящей через начало координат; 2) W_0 не содержит более двух параллельных между собой сторон; 3) начало координат находится внутри W_0.

Рассмотрим теперь средние (3) в случае, когда W_0 — многоугольник с указанными выше свойствами. Следующая теорема содержит условия регулярности средних типа Бернштейна — Рогозинского в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Пусть W_0 — многоугольник, обладающий свойствами 1—3, а m — максимальное количество его сторон, никакие две из которых не параллельны между собой. Можно указать 2^m таких точек, что если мера расположена в них равномерно, то R_n регулярны (при некоторых γ).*

В конце доказательства этой теоремы выполняется проверка ограниченности соответствующих констант Лебега, для чего используем теоремы 4, 1 работы Р. М. Тригуба [1] (соответствующий двумерный вариант, который здесь фактически используется, приведен нами в [19]; далее ссылаемся на него как на лемму А).

Доказательство теоремы 1. Пусть W_0 — n-угольник, удовлетворяющий условиям теоремы, с вершинами в точках $A_\nu(a_\nu, b_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ($A_{n+1} \equiv A_1$). Перенумеруем его стороны. Сторона с номером ν — это сторона $[A_\nu A_{\nu+1}]$ с уравнениями ($0 \leqslant t \leqslant 1$)

$$x = a_\nu + (a_{\nu+1} - a_\nu)t, \quad y = b_\nu + (b_{\nu+1} - b_\nu)t.$$

Пусть мера точек (u_k, v_k) равна $\alpha_k \neq 0$ ($\Sigma\alpha_k = 1$). Рассмотрим теперь соответствующие средние (2). Ввиду (6) необходимое условие их регулярности имеет вид

$$\sum_k \alpha_k e^{-i\gamma(xu_k+yv_k)} = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial W_0,$$

а учитывая уравнения ∂W_0, приходим к следующей системе уравнений ($1 \leqslant \nu \leqslant n$):

$$\sum_k \alpha_k e^{-i\gamma(a_\nu u_k+b_\nu v_k)} e^{-i\gamma((a_{\nu+1}-a_\nu)u_k+(b_{\nu+1}-b_\nu)v_k)t} = 0.$$

После приведения подобных членов (они обязательно имеются) в каждом уравнении системы имеем

$$\sum_k \alpha_k e^{-i\gamma(a_\nu u_k+b_\nu v_k)} = 0, \tag{7}$$

причем суммирование ведется по тем k, для которых $(a_{\nu+1}-a_\nu)u_k + (b_{\nu+1}-b_\nu)v_k = (a_{\nu+1}-a_\nu)u_s + (b_{\nu+1}-b_\nu)v_s$, ($s$ различны).

Следовательно, точки (u_k, v_k) лежат на прямой $(a_{\nu+1}-a_\nu)u + (b_{\nu+1}-b_\nu)v = c$, перпендикулярной ν-й стороне W_0. В каждом уравнении системы (7) по крайней мере два слагаемых. Таким образом, для каждой точки (u_k, v_k) в наборе этих точек должно быть еще хотя бы по одной, лежащей на перпендикулярах ко всем сторонам W_0, и значит, на перпендикуляре к каждой стороне W_0 лежат по крайней мере две точки. Так что если среди сторон W_0 имеются параллельные ν-й стороне, то, выбирая точки, лежащие на перпендикулярах к ним, можно обойтись всего двумя (минимальное количество).

Укажем теперь точки (u_k, v_k). В качестве первой возьмем произвольную точку плоскости (u, v), т. е. $(u_1, v_1) = (u, v)$. Сместим далее эту точку в направлении, перпендикулярном первой стороне W_0 (в направлении вектора $(b_2^{(1)} - b_1^{(1)}, a_1^{(1)} - a_2^{(1)})$, $b_i^{(1)} = b_i$, $a_i^{(1)} = a_i$, $i = 1, 2$. Имеем $(u_2, v_2) = (u_1 + (b_2^{(1)} - b_1^{(1)})t_1, v_1 - (a_2^{(1)} - a_1^{(1)})t_1)$. Параметры $t_j \neq 0$ (здесь и далее) пока считаем произвольными. Сместим указанные выше две точки в направлении, перпендикулярном второй стороне W_0 (в направлении вектора $(b_3^{(2)} - b_2^{(2)}, a_2^{(2)} - a_3^{(2)})$, $b_i^{(2)} = b_i$, $a_i^{(2)} = a_i$, $i = 2, 3$). Тогда $(u_3, v_3) = (u_1 + (b_3^{(2)} - b_2^{(2)})t_2, v_1 - (a_3^{(2)} - a_2^{(2)})t_2)$ и $(u_4, v_4) = (u_2 + (b_3^{(2)} - b_2^{(2)})t_2, v_2 - (a_3^{(2)} - a_2^{(2)})t_2)$. Всего теперь получены четыре точки.

В наборе сторон W_0 найдем следующую, не параллельную двум предыдущим, и сместим указанные четыре точки перпендикулярно этой стороне, т. е. в направлении вектора $(b_4^{(3)} - b_3^{(3)}, a_3^{(3)} - a_4^{(3)})$, где $(a_3^{(3)}, b_3^{(3)}) = (a_p, b_p)$ и либо $p = 3$, либо $p = 4$; а $a_4^{(3)} = a_{p+1}$; $b_4^{(3)} = b_{p+1}$. Получим восемь точек.

Пусть после $(\nu - 1)$-го смещения (рассматривались только смещения по различным направлениям, из параллельных направлений выбиралось только одно) получены точки $(u_1, v_1), \ldots, (u_{2^{\nu-1}}, v_{2^{\nu-1}})$ в количестве $2^{\nu-1}$. Пусть сторона, определяемая вершинами $(a_\nu^{(\nu)}, b_\nu^{(\nu)})$ и $(a_{\nu+1}^{(\nu)}, b_{\nu+1}^{(\nu)})$, — следующая сторона W_0, не параллельная ни одной из предыдущих. Сместим указанные $2^{\nu-1}$ точек перпендикулярно этой стороне (значит, в направлении вектора $(b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)}, a_\nu^{(\nu)} - a_{\nu+1}^{\nu})$. Получим всего 2^ν точек. Смещенные точки имеют вид $(u_{2^{\nu-1}+\mu}, v_{2^{\nu-1}+\mu})$, где $u_{2^{\nu-1}+\mu} = u_\mu + (b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)})t_\nu$, $v_{2^{\nu-1}+\mu} = v_\mu - (a_{\nu+1}^{(\nu)} - a_\nu^{(\nu)})t_\nu$, $1 \leqslant \mu \leqslant 2^{\nu-1}$. Очевидно, продолжая дальше этот процесс, будем получать пары точек, лежащие на прямых, перпендикулярных ко всем сторонам W_0, участвующих в предыдущих смещениях. Закончив построение, получим 2^m точек.

Далее будем рассматривать только те стороны W_0, которые участвовали в процессе смещения (перенумеруем их заново). После этого рассмотрим все точки, которые смещались перпендикулярно ν-й (в новой нумерации) стороне W_0. Всего их 2^{m-1}. Пусть это точки $(u_\mu^{(\nu)}, v_\mu^{(\nu)})$, $1 \leqslant \mu \leqslant 2^{m-1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$. После их смещения перпендикулярно ν-й стороне W_0 получим точки $(u_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)}, v_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)})$. Очевидно,

$$u_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)} = u_\mu^{(\nu)} + (b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)})t_\nu, \quad v_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)} = v_\mu^{(\nu)} - (a_{\nu+1}^{(\nu)} - a_\nu^{(\nu)})t_\nu.$$

Зафиксируем ν. Рассмотрим уравнение, соответствующее ν из системы (7), т. е. (k как в (7))

$$\sum_k \alpha_k e^{-i\gamma(a_\nu^{(\nu)} u_k + b_\nu^{(\nu)} v_k)} = 0.$$

Рассмотрим это уравнение для двух точек, лежащих на прямой, перпендикулярной ν-й стороне W_0, $(u_\mu^{(\nu)}, v_\mu^{(\nu)})$ с мерой $\alpha_\mu^{(\nu)}$ и $(u_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)}, v_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)})$ с мерой $\alpha_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)}$; $\mu = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Получим

$$\alpha_\mu^{(\nu)} e^{-i\gamma(a_\nu^{(\nu)} u_\mu^{(\nu)} + b_\nu^{(\nu)} v_\mu^{(\nu)})} + \alpha_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)} \times$$
$$\times e^{-i\gamma(a_\nu^{(\nu)}(u_\mu^{(\nu)} + (b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)})t_\nu) + b_\nu^{(\nu)}(v_\mu^{(\nu)} - (a_{\nu+1}^{(\nu)} - a_\nu^{(\nu)})t_\nu))} = 0,$$

или

$$\alpha_\mu^{(\nu)} + \alpha_{2^{m-1}+\mu}^{(\nu)} e^{-i\gamma(a_\nu^{(\nu)} b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)} a_{\nu+1}^{(\nu)})t_\nu} = 0.$$

Ввиду равномерного распределения меры $\alpha_i = 2^{-m}$ и имеем $(r_\nu \in Z)$ $e^{-i\gamma(a_\nu^{(\nu)} b_{\nu+1}^{(\nu)} - b_\nu^{(\nu)} a_{\nu+1}^{(\nu)})t_\nu} = -1$ или $\gamma = \dfrac{(2r_\nu + 1)\pi}{(a_\nu^{(\nu)} b_{\nu+1}^{(\nu)} - a_{\nu+1}^{(\nu)} b_\nu^{(\nu)})t_\nu}$. В силу условий теоремы γ существует. Рассуждая аналогично, получаем γ в таком же виде для всех $\nu = 1, 2, \ldots, m$ (если последняя сторона W_0 не параллельна ни одной из предыдущих, то $(a_{m+1}^{(m)}, b_{m+1}^{(m)}) = (a_n, b_n)$).

Покажем, что t_ν можно подобрать таким образом, чтобы все γ для всех ν были равны. Получаем

$$\frac{2r_1 + 1}{(a_1^{(1)} b_2^{(1)} - b_1^{(1)} a_2^{(1)})t_1} = \frac{2r_2 + 1}{(a_2^{(2)} b_3^{(2)} - a_3^{(2)} b_2^{(2)})t_2} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{2r_\nu + 1}{(a_\nu^{(\nu)} b_{\nu+1}^{(\nu)} - a_{\nu+1}^{(\nu)} b_\nu^{(\nu)})t_\nu} = \ldots = \frac{2r_m + 1}{(a_m^{(m)} b_{m+1}^{(m)} + a_{m+1}^{(m)} b_m^{(m)})t_m}. \tag{8}$$

Для нахождения $t_1, \ldots, t_m$ имеем $m - 1$ уравнение. Пусть далее t_1 произвольно. Тогда из соотношения (8) получаем нужные значения t_ν, $\nu = 2, 3, \ldots, m$:

$$t_\nu = \frac{(a_1^{(1)} b_2^{(1)} - b_1^{(1)} a_2^{(1)})(2r_\nu + 1)t_1}{(a_\nu^{(\nu)} b_{\nu+1}^{(\nu)} - a_{\nu+1}^{(\nu)} b_\nu^{(\nu)})(2r_1 + 1)}.$$

Докажем теперь регулярность средних (3) для указанных (u_k, v_k), вычисленного γ и равномерной меры. В силу (5) имеем

$$\varphi(x, y) = \chi_{W_0}(x, y)\, 2^{-m} \sum_{k=1}^{2^m} e^{-i\gamma(xu_k + yv_k)}.$$

Хорошо известно, что средние типа (4) регулярны, если $\varphi(0, 0) = 1$, и нормы операторов $R_n(f)$ в C ограничены равномерно по n. В рассматриваемом случае $\varphi(0, 0) = 1$. Равномерная ограниченность норм оператора $R_n(f)$ в метрике C доказывается с помощью леммы А и леммы 3 [20]. Теорема доказана.

2. Аппроксимативные свойства двумерных средних Бернштейна и Рогозинского. Пусть S_{mn} — прямоугольные частичные суммы ряда (1), т. е.

$$S_{mn}(f; x, y) = \sum_{k=-m}^{m} \sum_{l=-n}^{n} c_{kl} e^{i(kx+ly)}.$$

Рассмотрим двумерные прямоугольные средние Бернштейна, Рогозинского и Рисса, т. е. соответственно средние

$$B_{mn}(f; x, y) = \frac{1}{4}\left(S_{mn}(x, y) + S_{mn}\left(x + \frac{\pi}{m}, y\right) + S_{mn}\left(x, y + \frac{\pi}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + S_{mn}\left(x + \frac{\pi}{m}, y + \frac{\pi}{n}\right)\right) = \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{4}(1 + e^{i\pi \frac{k}{m}})(1 + e^{i\pi \frac{l}{n}})\, c_{kl} e^{i(kx+ly)},$$

$$R_{mn}(f; x; y) = \frac{1}{4}\left(S_{mn}\left(x - \frac{\pi}{2m}, y - \frac{\pi}{2n}\right) + S_{mn}\left(x + \frac{\pi}{2m}, y - \frac{\pi}{2n}\right) + \right.$$

$$\left. + S_{mn}\left(x - \frac{\pi}{2m}, y + \frac{\pi}{2n}\right) + S_{mn}\left(x + \frac{\pi}{2m}, y + \frac{\pi}{2n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n} \cos\frac{k\pi}{2m}\cos\frac{l\pi}{2n}\, c_{kl} e^{i(kx+ly)},$$

$$\sigma_{mn}^{(r,s)}(f; x, y) = \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-n}^{n}\left(1 - \left(\frac{|k|}{m}\right)^r\right)\left(1 - \left(\frac{|l|}{n}\right)^s\right) c_{kl} e^{i(kx+ly)}.$$

Следующая теорема позволяет оценить уклонение $f \in C(T^2)$ от средних Бернштейна и Рогозинского через уклонения этой же функции от средних Рисса соответствующих показателей.

Теорема 2. *Существуют такие положительные константы* C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *что для любой функции двух переменных* $f \in C(T^2)$, 2π-*периодической по каждой переменной*

$$C_1 \| f(x, y) - \sigma_{mn}^{(1,1)}(f; x, y) \| \leqslant \| f(x, y) - B_{mn}(f; x, y) \| \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \| f(x, y) - \sigma_{mn}^{(1,1)}(f; x, y) \|, \tag{9}$$

$$C_3 \| f(x, y) - \sigma_{mn}^{(2,2)}(f; x, y) \| \leqslant \| f(x, y) - R_{mn}(f; x, y) \| \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \| f(x, y) - \sigma_{mn}^{(2,2)}(f; x, y) \|, \tag{10}$$

$$(\| \ldots \| = \| \ldots \|_{C(T^2)}).$$

Доказательство. Докажем (9). Сначала заметим, что средние B_{mn} и $\sigma_{mn}^{(1,1)}$ определяются множителями (см. (4)), являющимися значениями соответственно функций $\varphi_1(x, y) = \frac{1}{4}(1 + e^{i\pi x})(1 + e^{i\pi y})$, $\varphi_2(x, y) = (1 - x)(1 - y)$, если $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$ и $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = 0$ для остальных x и y. Докажем правое неравенство в (9). В силу принципа сравнения линейных средних рядов Фурье (см. [1]) переходная функция в этом случае имеет вид

$$\varphi(x, y) = \left(1 - \frac{1}{4}(1 + e^{i\pi x})(1 + e^{i\pi y})\right)(x + y - xy)^{-1},$$

если $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$; $\varphi(0, 0) = -\pi i/2$ и $\varphi(x, y) = 1$ для остальных x и y.

Проверим ограниченность констант Лебега (равномерно по m и n) соответствующей этой функции последовательности. Очевидно, что $\varphi(x, y)$ непрерывна $\forall (x, y) \in R^2$. Кроме того, $|\varphi_{xy}(x, y)| \leqslant C$. Этого достаточно для того, чтобы соответствующие константы Лебега были ограниченными (см., например, [16, 17, 1], теоремы 4, 1). Для проверки ограниченности констант Лебега можно было бы воспользоваться и упомянутой выше леммой А. Осталось применить теперь принцип сравнения. Левое неравенство в (9), а также (10) доказываются аналогично. Теорема доказана.

Ниже C_5—C_{10} — также абсолютные положительные константы.

Следствие 1. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 2, то*

$$C_5\omega_2^+(f;\,\pi/n,\,\pi/n)\leqslant\|f(x,y)-R_{nn}(f;\,x,y)\|\leqslant C_6\omega_2^+(f;\,\pi/n,\,\pi/n),$$

где $\omega_2^+(f;\,h_1,h_2)=\left\|\frac{1}{h_1h_2}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}(\Delta_{20}^{\delta_1}f(x,y)+\Delta_{02}^{\delta_2}f(x,y))\,d\delta_1 d\delta_2\right\|_C$ — *модуль гладкости f, введенный Р. М. Тригубом (см. [1]).*

Этот результат следует из теоремы 2 и работы [18].

Замечание. Утверждения теоремы 2 верны также в случае $f\in L_p(T^2)$, $1\leqslant p<\infty$.

Следствие 2. *Если $f\in L_p(T^2)$, $1<p<\infty$, и 2π-периодическая по каждой переменной, то существуют такие C_7, C_8, C_9, C_{10}, что*

$$C_7(\omega(f;\,\pi/m,0)_p+\omega(f;\,0,\pi/n)_p)\leqslant\|f(x,y)-B_{mn}(f;\,x,y)\|_p\leqslant$$
$$\leqslant C_8(\omega(f;\,\pi/m,0)_p+\omega(f;\,0,\pi/n)_p),$$
$$C_9(\omega_2(f;\,\pi/m,0)_p+\omega_2(f;\,0,\pi/n)_p)\leqslant\|f(x,y)-R_{mn}(f;\,x,y)\|_p\leqslant$$
$$\leqslant C_{10}(\omega_2(f;\,\pi/m,0)_p+\omega_2(f;\,0,\pi/n)_p),$$

где ω (ω_2) — *частичные модули непрерывности (гладкости).*

Эти результаты следуют из теоремы 2 и работы [19].

1. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, **44**, № 6, с. 1378—1409.
2. *Стечкин С. Б.* Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского.— В кн.: Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. с. 479—492.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
4. *Власов В. Ф., Тиман А. Ф.* Об одной зависимости интегралов от модулей тригонометрических полиномов.— Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 6, с. 1263—1265.
5. *Тригуб Р. М.* Конструктивные характеристики некоторых классов функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, **29**, № 3, с. 615—630.
6. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье, подобных методу Бернштейна—Рогозинского.— Там же, 1967, **31**, № 2, с. 335—348.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.
8. *Chandrasekharan K., Minakshisundaram S.* Some results on doulbe Fourier series.— Duke Math. J., 1947, **14**, N 3, p. 731—753.
9. *Огиевецкий И. И.* Суммирование двойных рядов методом Бернштейна и Рогозинского. Науч. зап. Днепропетр. ун-та, 1948, № 34, с. 163—178.
10. *Бендукидзе А. Д.* О суммировании двойных рядов Фурье—Лебега методом Бернштейна.— Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, с. 67—82.
11. *Гаврилюк В. Т.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.— В кн.: Теория приближения функций. М. : Наука, 1977, с. 101— 103.
12. *Габисония О. Д.* О множестве точек суммируемости двойных рядов Фурье.— Там же, с. 94—97.
13. *Кибалко П. И.* О приближении периодических функций двух переменных одним классом линейных методов суммирования двойных рядов Фурье.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат,. 1977, № 1, с. 34—43.
14. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
15. *Заставный В. П., Носенко Ю. Л.* Регулярность средних типа Бернштейна — Рогозинского двойных рядов Фурье.— В кн.: Междунар. конф. по теории приближения функций : Тез. докл. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 83.
16. *Носенко Ю. Л.* Об условиях типа Сидона интегрируемости двойных тригонометрических рядов.— В кн.: Теория функций и отображений. Киев : Наук. думка, 1979, с. 132 — 149.
17. *Лебедь А. Г.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость двойных рядов Фурье.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 12, с. 91—102.
18. *Носенко Ю. Л.* Точная оценка уклонения непрерывных функций двух переменных от их прямоугольных средних Рисса.— В кн.: Конструктивная теория функций и теория отображений. Киев : Наук. думка, 1981, с. 129—134.
19. *Носенко Ю. Л.* Аппроксимативные свойства средних Рисса двойных рядов Фурье.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 2, с. 157—165.
20. *Заставный В. П.* О множестве нулей преобразования Фурье меры и суммировании двойных рядов Фурье методами типа Бернштейна—Рогозинского.— Там же, 1984, **36**, № 5, с. 615—621.

Донец. политехн. ин-т

Получено 21.10.83,
после доработки — 20.12.84

Ниже C_5—C_{10} — также абсолютные положительные константы.

С л е д с т в и е 1. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 2, то*

$$C_5\omega_2^+(f;\ \pi/n,\ \pi/n) \leqslant \| f(x, y) - R_{nn}(f;\ x, y) \| \leqslant C_6\omega_2^+(f;\ \pi/n,\ \pi/n),$$

где $\omega_2^+(f;\ h_1, h_2) = \left\| \frac{1}{h_1h_2} \int\limits_0^{h_1} \int\limits_0^{h_2} (\Delta_{20}^{\delta_1} f(x, y) + \Delta_{02}^{\delta_2} f(x, y))\, d\delta_1 d\delta_2 \right\|_C$ — *модуль гладкости f, введенный Р. М. Тригубом (см. [1]).*

Этот результат следует из теоремы 2 и работы [18].

З а м е ч а н и е. Утверждения теоремы 2 верны также в случае $f \in L_p(T^2)$, $1 \leqslant p < \infty$.

С л е д с т в и е 2. *Если $f \in L_p(T^2)$, $1 < p < \infty$, и 2π-периодическая по каждой переменной, то существуют такие C_7, C_8, C_9, C_{10}, что*

$$C_7(\omega(f;\ \pi/m, 0)_p + \omega(f;\ 0, \pi/n)_p) \leqslant \| f(x, y) - B_{mn}(f;\ x, y) \|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_8(\omega(f;\ \pi/m, 0)_p + \omega(f;\ 0, \pi/n)_p),$$
$$C_9(\omega_2(f;\ \pi/m, 0)_p + \omega_2(f;\ 0, \pi/n)_p) \leqslant \| f(x, y) - R_{mn}(f;\ x, y) \|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_{10}(\omega_2(f;\ \pi/m, 0)_p + \omega_2(f;\ 0, \pi/n)_p);$$

где ω (ω_2) — частичные модули непрерывности (гладкости).

Эти результаты следуют из теоремы 2 и работы [19].

1. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, **44**, № 6, с. 1378—1409.
2. *Стечкин С. Б.* Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского.— В кн.: Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. с. 479—492.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
4. *Власов В. Ф., Тиман А. Ф.* Об одной зависимости интегралов от модулей тригонометрических полиномов.— Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 6, с. 1263—1265.
5. *Тригуб Р. М.* Конструктивные характеристики некоторых классов функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, **29**, № 3, с. 615—630.
6. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье, подобных методу Бернштейна—Рогозинского.— Там же, 1967, **31**, № 2, с. 335—348.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 508 с.
8. *Chandrasekharan K., Minakshisundaram S.* Some results on doulbe Fourier series.— Duke Math. J., 1947, **14**, N 3, p. 731—753.
9. *Огиевецкий И. И.* Суммирование двойных рядов методом Бернштейна и Рогозинского. Науч. зап. Днепропетр. ун-та, 1948, № 34, с. 163—178.
10. *Бендукидзе А. Д.* О суммировании двойных рядов Фурье—Лебега методом Бернштейна.— Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, с. 67—82.
11. *Гаврилюк В. Т.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.— В кн.: Теория приближения функций. М. : Наука, 1977, с. 101— 103.
12. *Габисония О. Д.* О множестве точек суммируемости двойных рядов Фурье.— Там же, с. 94—97.
13. *Кибалко П. И.* О приближении периодических функций двух переменных одним классом линейных методов суммирования двойных рядов Фурье.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат,. 1977, № 1, с. 34—43.
14. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.
15. *Заставный В. П., Носенко Ю. Л.* Регулярность средних типа Бернштейна — Рогозинского двойных рядов Фурье.— В кн.: Междунар. конф. по теории приближения функций : Тез. докл. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983, с. 83.
16. *Носенко Ю. Л.* Об условиях типа Сидона интегрируемости двойных тригонометрических рядов.— В кн.: Теория функций и отображений. Киев : Наук. думка, 1979, с. 132 — 149.
17. *Лебедь А. Г.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость двойных рядов Фурье.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 12, с. 91—102.
18. *Носенко Ю. Л.* Точная оценка уклонения непрерывных функций двух переменных от их прямоугольных средних Рисса.— В кн.: Конструктивная теория функций и теория отображений. Киев : Наук. думка, 1981, с. 129—134.
19. *Носенко Ю. Л.* Аппроксимативные свойства средних Рисса двойных рядов Фурье.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 2, с. 157—165.
20. *Заставный В. П.* О множестве нулей преобразования Фурье меры и суммировании двойных рядов Фурье методами типа Бернштейна—Рогозинского.— Там же, 1984, **36**, № 5, с. 615—621.

Донец. политехн. ин-т

Получено 21.10.83,
после доработки — 20.12.84