УДК 517.5

О. Н. Литвин

Интерполяция данных Коши на нескольких параллельных прямых в R^2 с сохранением класса дифференцируемости

В работе изложен алгоритм построения операторов $E_{M,\rho,\beta}$, которые обладают следующими свойствами:

$$f(x, y) \in C^{p-1}(\Omega) \Rightarrow E_{M,\rho,\beta} f(x, y) \in C^{p-1}(\Omega), \tag{1}$$

$$\partial^s E_{M,\rho,\beta} f(x, y)/\partial y^s |_{y=y_k} = f^{(0,s)}(x, y_k), \quad (s = \overline{0, \rho_k - 1};\ k = \overline{0, M-1}). \tag{2}$$

Здесь $\Omega = \{-\infty < x < \infty,\ a \leqslant y \leqslant b\}$,

$$a \leqslant y_0 < y_1 < \dots < y_{M-1} \leqslant b, \quad \rho = (\rho_0, \dots, \rho_{M-1}), \quad \rho_k \in \mathbb{N},$$

$$\rho_k \leqslant p \in \mathbb{N},\ \rho_0 + \dots + \rho_{M-1} = N; \quad \beta = \{\beta_{ksi}\}\ (k = \overline{0, M-1};\ i, s = \overline{0, \rho_k - 1}),$$

$$\beta_{ks0} < \beta_{ks1} < \dots < \beta_{ks,\rho_k - 1} \quad (k = \overline{0, M-1};\ s = \overline{0, \rho_k - 1}).$$

Числа y_k, ρ_k, β_{ksi} предполагаются заданными.

Как известно [1], интерполянт, удовлетворяющий условиям (2), можно построить в виде полинома Эрмита $E_{M,\rho} f$ по переменной y (7), который, однако, не сохраняет дифференциальные свойства $f(x, y)$:

$$f(x, y) \in C^{p-1}(\Omega) \Rightarrow E_{M,\rho} f(x, y) \in C^{p-1-\bar\rho}(\Omega), \quad \bar\rho = \max_k \{\rho_k\}. \tag{3}$$

Заметим, что полином Эрмита (и его частный случай — формула Тейлора) широко используются в различных исследованиях по теории функций одной переменной, однако в многомерном случае эти формулы используются реже, на наш взгляд, в силу свойства (3). Операторы $E_{M,\rho,\beta}$ в силу (1), (2) не только интерполируют функцию и ее нормальные производные на нескольких параллельных прямых, но также порождают интерполянты, принадлежащие тому же классу дифференцируемости, что и интерполируемая функция f, что значительно расширяет их область применимости.

Теорема 1. *Пусть $f(x, y) \in C^{p-1}(\Omega)$, y_k, ρ_k, β_{ksi} — фиксированные числа, удовлетворяющие отмеченным выше ограничениям. Тогда существуют числа α_{ksi} такие, что функция*

$$E_{M,\rho,\beta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{k0i} f(x + \beta_{k0i}(y - y_k), y_k) + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=1}^{\rho_k - 1} h_{ks}(y) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{ksi} \int_0^{x + \beta_{ksi}(y - y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{[x + \beta_{ksi}(y - y_k) - t]^{s-1}}{(s-1)!} dt, \tag{4}$$

где

$$h_{ks}(y)=\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{M-1}(y-y_l)^{\rho_l}\left\{\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{M-1}(y-y_l)^{-\rho_l}\right\}_{(y_k)}^{(\rho_k-1-s)}\quad (k=\overline{0,M-1};\ s=\overline{0,\rho_k-1})$$

$$\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)}=\sum_{s=0}^{\nu}\varphi^{(s)}(y_k)\frac{(y-y_k)^s}{s!}\tag{5}$$

удовлетворяет условиям (1), (2).

Постоянные α_{ksi} ($k=\overline{0,M-1}$; $s=\overline{0,\rho_k-1}$) *должны удовлетворять следующим системам линейных алгебраических уравнений*:

$$\sum_{i=0}^{\rho_k-1}\alpha_{ksi}(\beta_{ksi})^q=\delta_{s,q}\quad (i,s,q=\overline{0,\ \rho_k-1};\quad k=\overline{0,M-1}).\tag{6}$$

Доказательство. Свойство (1) следует из того, что

$$f(x,y)\in C^p(R^2)\Rightarrow f^{(0,s)}(x,y)\in C^{p-s}(R^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{\varphi(x,y)}f^{(0,s)}(t,y_k)\frac{[\varphi(x,y)-t]^{s-1}}{(s-1)!}dt\in C^p(R^2),\quad \forall\varphi(x,y)\in C^p(R^2).$$

Интерполяционные свойства (2) доказываются непосредственной проверкой с учетом равенства (6) и следующих свойств функций $h_{ks}(y)$, которые отличаются от базисных многочленов Эрмита отсутствием множителя $(y-y_k)^s/s!$:

$$h_{ks}^{(q)}(y_l)=0,\quad l\neq k,\quad k,l=\overline{0,M-1};\quad q,s=\overline{0,\ \rho_l-1};$$

$$h_{k,s}^{(q)}(y_k)=\delta_{0,q}\quad (q=\overline{0,\ \rho_k-1-s}).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. При фиксированных различных β_{ksi} ($k=\overline{0,\ M-1}$, $s,\ i=\overline{0,\ \rho_k-1}$) системы (6) имеют единственное решение, так как их определители являются определителями Вандермонда и, следовательно, не равны нулю; т. е. в этом случае интерполянт $E_{M,\rho,\beta}f$ будет единственным.

Замечание 2. Для практики наиболее простые выражения получаются при $\beta_{ksi}=\beta_i$ ($k=\overline{0,M-1}$; $i,s=\overline{0,\rho_k-1}$), при этом, если устремить β_i к нулю, то в пределе получим (с помощью правила Лопиталя) классическую формулу Тейлора (предполагая, что множество чисел $\{\beta_i\}$ симметрично относительно нуля: $C\in\{\beta_i\}\Rightarrow -C\in\{\beta_i\}$).

Пусть, далее, $K^p(\Omega)$ обозначает множество функций $f(x,y)$ со следующими свойствами: $f(x,y)\in C^{p-1}(\Omega)$ и $f^{(p-s,s)}(x,y)$ ($s=\overline{0,p}$) — кусочно-непрерывные, интегрируемые по переменной y на $[a,b]$ функции.

Лемма. *Пусть*

$$E_{M,\rho}f(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{\rho_k-1}f^{(0,s)}(x,y_k)h_{ks}(y)\frac{(y-y_k)^s}{s!}\tag{7}$$

— многочлен Эрмита функции $f(x,y)$ *по переменной* y, *интерполирующий* $f^{(0,s)}(x,y)$ *на прямых* $y=y_k$ ($k=\overline{0,M-1}$, $s=\overline{0,\rho_k-1}$). *Тогда, если* $f(x,y)\in K^p(\Omega)$, $\bar\rho\leqslant p\leqslant N$, *то остаточный член* $R_{M,\rho}f(x,y)=(I-E_{M,\rho})\times\times f(x,y)$ *может быть представлен в следующей интегральной форме*:

$$R_{M,\rho}f(x,y)=\int_a^b f^{(0,p)}(x,\eta)G_{M,\rho,p}(y,\eta)d\eta,\tag{8}$$

где

$$G_{M,\rho,p}(y, \eta) = H_\rho(y, \eta) - E_{M,\rho}[H_\rho(y, \eta)] = R_{M,\rho}[H_\rho(y, \eta)], \tag{9}$$

$$H_\rho(y, \eta) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_{\rho_k}(y, \eta)\, \sigma_k(y, \eta), \tag{10}$$

$$H_{\rho_k}(y, \eta) = (y - \eta)^{\rho_k - 1}/(\rho_k - 1)!, \tag{11}$$

$$\sigma_k(y, \eta) = \begin{cases} 0, & \eta \bar{\in} [y_k, y], \\ 1, & y_k \leqslant \eta \leqslant y, \\ -1, & y \leqslant \eta \leqslant y_k. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Если $p \leqslant N - 1$, то можно написать формулы Тейлора

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y) \frac{(y - y_k)^s}{s!} + \int_{y_k}^{y} f^{(0,p)}(x, \eta) \frac{(y - \eta)^{p-1}}{(\rho - 1)!} d\eta,$$

$$k = \overline{0, M - 1}, \tag{13}$$

и, следовательно, для $f \in K^p(\Omega)$ справедливо следующее представление:

$$f(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} +$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \int_{y_k}^{y} f^{(0,p)}(x, \eta) \frac{(y - \eta)^{p-1}}{(p - 1)!} d\eta.$$

Последнюю формулу удобно представить в следующем виде:

$$f(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} + \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta) H_\rho(y, \eta)\, d\eta. \tag{14}$$

Применяя к функции $f \in K^p(\Omega)$, определяемой выражением (14), оператор $R_{M,\rho}$, получаем

$$R_{M,\rho} f(x, y) = R_{M,\rho}\left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho_k - 1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!}\right] +$$

$$+ \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta) R_{M,\rho}[H_\rho(y, \eta)]\, d\eta = \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta.$$

Здесь учтено, что

$$E_{M,\rho}\left[\sum_{l=0}^{p} \varphi_l(x)\, y^l\right] = \sum_{l=0}^{p} \varphi_l(x)\, y^l, \quad \forall p : 0 \leqslant p \leqslant N - 1, \quad \varphi_l(x) \in C(R)$$

и, следовательно,

$$R_{M,\rho}\left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!}\right] = 0. \tag{15}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если $f(x, y) \in K^p(\Omega)$, $E_{M,\rho,\beta} f(x, y)$ — ее единственный (при фиксированной системе чисел β_{ksi}) обобщенный многочлен Эрмита, обладающий свойствами* (1), (2), *то для остатка $R_{M,\rho,\beta} f(x, y) = (I - E_{M,\rho,\beta}) f(x, y)$ справедливо следующее интегральное представление:*

$$R_{M,\rho,\beta} f(x, y) = \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta -$$

$$- \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho_k - 1} \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{ksi} (\beta_{ksi})^{\rho_k} \int_a^b f^{(\rho_k - s, s)}(x + \beta_{ksi}(\eta - y_k), y_k)\, \chi_{ks}(y, \eta)\, d\eta, \quad (16)$$

$$\chi_{k,s}(y, \eta) = h_{ks}(y) \frac{(y - \eta)^{\rho_k - 1}}{(\rho_k - 1)!} \sigma_k(y, \eta) \quad (k = \overline{0, M-1};\ s = \overline{0, \rho_k - 1}).$$

Доказательство. Применим оператор $R_{M,\rho,\beta}$ к функции $f(x, y)$, определяемой равенством

$$f(x, y) = E_{M,\rho} f(x, y) + R_{M,\rho} f(x, y). \quad (17)$$

В результате получим

$$R_{M,\rho,\beta} f(x, y) = R_{M,\rho,\beta} [E_{M,\rho} f(x, y)] + R_{M,\rho,\beta} [R_{M,\rho} f(x, y)] = E_{M,\rho} f(x, y) -$$

$$- E_{M,\rho,\beta} f(x, y) + R_{M,\rho,\beta} \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \times$$

$$\times \left[f(x, y_k) - \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{k0i} f(x + \beta_{k0i}(y - y_k), y_k) \right] + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=1}^{\rho_k - 1} h_{ks}(y) \times$$

$$\times \left[\frac{(y - y_k)^s}{s!} f^{(0,s)}(x, y_k) - \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{ksi} \int_0^{x + \beta_{ksi}(y - y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{[x + \beta_{ksi}(y - y_k) - t]^{s-1}}{(s-1)!} dt \right] + \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta =$$

$$= - \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \int_{y_k}^{y} \left[\frac{\partial^{\rho_k}}{\partial \eta^{\rho_k}} \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{k0i} f(x + \beta_{k0i}(\eta - y_k), y_k) \right] \times$$

$$\times \frac{(y - \eta)^{\rho_k - 1}}{(\rho_k - 1)!} d\eta - \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=1}^{\rho_k - 1} h_{ks}(y) \int_{y_k}^{y} \left[\frac{\partial^{\rho_k}}{\partial \eta^{\rho_k}} \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{ksi} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x + \beta_{ksi}(\eta - y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{(x + \beta_{ksi}(\eta - y_k) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \right] \frac{(y - \eta)^{\rho_k - 1}}{(\rho_k - 1)!} d\eta +$$

$$+ \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta = \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta)\, G_{M,\rho,p}(y, \eta)\, d\eta -$$

$$- \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho_k - 1} h_{ks}(y) \sum_{i=0}^{\rho_k - 1} \alpha_{ksi} (\beta_{ksi})^{\rho_k} \int_{y_k}^{y} f^{(\rho_k - s, s)}(x + \beta_{ksi}(\eta - y_k), y_k) \times$$

$$\times \frac{(y-\eta)^{\rho_k-1}}{(\rho_k-1)!}\, d\eta = \int_a^b f^{(0,p)}(x,\eta)\, G_{M,\rho,p}(y,\eta)\, d\eta -$$

$$- \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho_k-1} \sum_{i=0}^{\rho_k-1} \alpha_{ksi} (\beta_{ksi})^{\rho_k} \int_a^b f^{(\rho_k-s,s)}(x+\beta_{ksi}(\eta-y_k),\ y_k) \Bigg] \chi_{k,s}(y,\eta)\, d\eta.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $M=1$, то получаем следующее обобщение формулы Тейлора для функции $f(x,y) \in K^N(\Omega)$, сохраняющее дифференциальные свойства f:*

$$f(x,y) = T_{N-1} f(x,y) + R_N f(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{0i} f(x+\beta_{0i}(y-y_0), y_0) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{si} \int_0^{x+\beta_{si}(y-y_0)} f^{(0,s)}(t,y_0) \frac{(x+\beta_{si}(y-y_0)-t)^{s-1}}{(s-1)!}\, dt + R_N f(x,y), \quad (18)$$

$$R_N f(x,y) = \int_{y_0}^{y} \Bigg[f^{(0,N)}(x,\eta) - \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{si} (\beta_{si})^N f^{(N-s,s)}(x+\beta_{si}(\eta-y_0), y_0) \Bigg] \times$$

$$\times \frac{(y-\eta)^{N-1}}{(N-1)!}\, d\eta, \quad (19)$$

где постоянные β_{si}, α_{si} удовлетворяют условиям $\beta_{s0} < \beta_{s1} < \ldots < \beta_{sN-1}$, $\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{si} (\beta_{si})^q = \delta_{sq}$ $(s, q = \overline{0, N-1})$. Функция $f(x,y)$ обладает следующими свойствами: $T_{N-1} f(x,y) \in K^N(\Omega)$; $\partial^s T_{N-1} f(x,y)/\partial y^s = f^{(0,s)}(x,y)$, $y = y_0$, $s = \overline{0, N-1}$. Заметим, что формула (18) при $N = 2$ содержит формулу Даламбера [2].

Замечание 2. Доказательство леммы при $M = 2$, $\rho_0 = \rho_1$ дано в работе [3], откуда и позаимствована идея доказательства для $M \geqslant 2$, $\forall \rho_k \leqslant p$.

Замечание 3. Для формулы (18) может быть получено также интегральное представление для остаточного члена в следующем виде:

$$R_N f(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial z_N(f;x,y;z)}{\partial z}\, dz,$$

где $z_N(f;x,y;z) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{0i} f(x+\beta_{0i}(y-z), z) + \sum_{s=1}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{si} \int_0^{x+\beta_{si}(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{(y+\beta_{si}(y-z)-t)^{s-1}}{(s-1)!}\, dt$, $z_N(f;x,y;y_0) = T_{N-1} f(x,y)$, $z_N(f;x,y;y) = f(x,y)$.

1. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування.— К.: Наук. думка, 1973.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.
3. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, 37, с. 165—185.

Укр. заочный политехн. ин-т, Харьков
Получено 11.05.84