УДК 517.948+512.13

Л. П. Кучко

О локальной эквивалентности функциональных уравнений

В настоящей работе приведен аналог теорем Стернберга [1] и Ченя [2] для функциональных уравнений, получены приложения к вопросу о существовании нетривиальных решений функциональных уравнений.

Пусть $F(t) = \Lambda t + f(t)$, $f(t) = O(\|t\|^2)$, — локальное C^∞-отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, а $G(t, z) = A(t)z + g(t, z)$, $g(0, z) = O(\|z\|^2)$, — локальное C^∞-отображение пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$x(F(t)) = G(t, x(t)). \qquad (1)$$

(Решения $x(t)$ уравнения (1) могут рассматриваться в различных классах гладкости.) C^∞-замена $x \to \Phi(t, y) = y + \varphi(t, y)$, $\varphi(0, y) = O(\|y\|^2)$ переводит уравнение (1) в уравнение

$$y(F(t)) = H(t, y(t)), \qquad (2)$$

где C^∞-отображение $H(t, z) = A_1(t) z + h(t, z)$, $h(0, z) = O(\|z\|^2)$, связано с отображением G соотношением

$$\Phi(F(t), H(t, y)) = G(t, \Phi(t, y)). \qquad (3)$$

Будем говорить, что уравнения (1) и (2) локально C^∞-эквивалентны, если уравнение (3) имеет локальное C^∞-решение $\Phi(t, y)$. Заметим, что если уравнения (1) и (2) локально C^∞-эквивалентны, то каждому решению уравнения (1) некоторого класса гладкости отвечает, в силу замены, решение уравнения (2) того же класса гладкости, и наоборот.

Для разрешимости уравнения (3) необходима его разрешимость в формальных рядах. Если такая разрешимость имеет место, будем говорить, что уравнения (1) и (2) формально эквивалентны.

Перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\varphi(B(t, y)) = A(t)\varphi(t, y) + \tilde{g}(t, \varphi(t, y)), \qquad (4)$$

где $B(t, y) = (\Lambda t + f(t),\ A_1(t) y + h(t, y))$, а $\tilde{g}(t, \varphi(t, y)) = g(t, y + \varphi(t, y)) + (A(t) - A_1(t)) y - h(t, y)$. В силу [3], в гиперболической ситуации, т. е. в случае, если матрица $B'_{(t,y)}(0, 0)$ невырождена и не имеет точек спектра на единичной окружности, из разрешимости уравнения (4) в формальных рядах вытекает его локальная C^∞-разрешимость. Из формальной эквивалентности уравнений (1) и (2) вытекает, что $A_1(0) = A(0)$. Поэтому множество собственных чисел оператора $B'_{(t,y)}(0, 0)$ представляет собой объединение спектров матриц Λ и $A(0)$. Из вышеизложенного следует теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы Λ и $A(0)$ не имеют точек спектра в нуле и на единичной окружности. Тогда из формальной эквивалентности уравнений* (1) *и* (2) *вытекает их локальная* C^∞*-эквивалентность.*

Пусть $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ — собственные числа матрицы Λ, а $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ — собственные числа матрицы $A(0)$. Для формальной эквивалентности уравнений (1) и (2) достаточно выполнения условий

$$\alpha_i \neq \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_p^{k_p} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}, \quad k_j \geqslant 0, \quad m_l \geqslant 0 \text{ — целые}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \qquad (5)$$

Из (5) вытекает отсутствие у матрицы $A(0)$ нулевых собственных чисел, а также, в силу ее вещественности, отсутствие точек спектра на единичной окружности. Поэтому при выполнении условий (5) из гиперболичности отображения Λ следует гиперболичность отображения B.

Следствие 1. *Если матрица Λ не имеет точек спектра в нуле и на единичной окружности и выполняются условия* (5), *то уравнения* (1) *и* (2) *локально* C^∞*-эквивалентны; в частности, при этих условиях уравнение* 1) *локально* C^∞*-эквивалентно линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами*

$$y(F(t)) = A(0) y(t). \qquad (6)$$

Если уравнение (1) «автономно», т. е. имеет вид

$$x(F(t)) = G(x(t)), \qquad (7)$$

то естественно линеаризовать его с помощью «автономной» замены $x \to \Phi(y)$. При этом вопрос о линеаризации уравнения (7) сводится к вопросу о локальной C^∞-сопряженности отображения G с линейным. В силу теоремы Стернберга [1], линеаризация уравнения (7) возможна, если у собственных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ матрицы $A = G'(0)$ отсутствуют резонансные соотношения, т. е. выполнены условия

$$\alpha_i \neq \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_p^{k_p}, \quad k_j \geqslant 0 \text{ — целые}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{8}$$

Следствие 2. *Если выполняются условия* (8), *то уравнение* (7) *локально* C^∞*-эквивалентно линейному уравнению*

$$y(F(t)) = Ay(t).$$

Если исходное уравнение является линейным, т. е.

$$x(F(t)) = A(t)x(t) + \gamma(t), \tag{9}$$

то для приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y(F(t)) = A(0)y(t) + \gamma_1(t) \tag{10}$$

достаточно наложить более слабые, чем (5), ограничения на собственные числа матриц Λ и $A(0)$. Замену переменных в этой ситуации следует искать в виде $x \to V(t)y$, где $V(t) = E + v(t)$, $v(t) = O(\| t \|^2)$. Для формальной эквивалентности уравнений (9) и (10) достаточно выполнения условий

$$\alpha_i \alpha_j^{-1} \neq \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}, \quad m_l \geqslant 0 \text{ — целые}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, p. \tag{11}$$

Следствие 3. *Если матрица* Λ *не имеет точек спектра в нуле и на единичной окружности и выполняются условия* (11), *то уравнение* (9) *локально* C^∞*-эквивалентно уравнению с постоянными коэффициентами* (10).

Очевидно, что если уравнение (10) имеет хотя бы одно C^∞-решение $y_0(t)$, то сдвиг $y(t) = z(t) + y_0(t)$ приведет уравнение (10) к однородному уравнению $z(F(t)) = A(0)z(t)$. Для формальной C^∞-разрешимости уравнения (10) достаточно выполнения условий $\alpha_i \neq \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}$, $m_l \geqslant 0$ — целые, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Возможность линеаризации уравнения (1) позволяет выяснить вопросы существования, единственности и описания его решений. Рассмотрим, например, вопрос о существовании локального нетривиального C^∞-решения уравнения (1) при условии $G(t, 0) = 0$. Для линейных уравнений вида $x(F(t)) = A(t)x(t)$ этот вопрос изучен в [4]. Из [4] и следствия 1 вытекает теорема.

Теорема 2. *Пусть матрица* Λ *не имеет точек спектра в нуле и на единичной окружности и выполняются условия* (5). *Тогда уравнение* (1) *при* $G(t, 0) = 0$ *имеет локальное нетривиальное* C^∞*-решение в том и только том случае, если матрица* Λ *имеет точки спектра по обе стороны от единичной окружности.*

Рассмотрим вопрос о существовании нетривиального решения «автономного» уравнения (7). В случае, если $F(t) = \Lambda t$ — линейное отображение, вопрос о существовании локального нетривиального C^∞-решения линейного уравнения $x(\Lambda t) = Ax(t)$ полностью изучен в [5]. Используя [5], можно получить условия нетривиальной C^∞-разрешимости уравнения

$$x(\Lambda t) = Ax(t) + g(x(t)), \quad g(x) = O(\| x \|^2). \tag{12}$$

Пусть матрица Λ невырождена, но, может быть, имеет точки спектра на единичной окружности. Положим $\sigma_k(\Lambda) = \min(\| \Lambda^k \|, \| \Lambda^{-k} \|)$, $k = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (8). *Тогда если последовательность* $\sigma_k(\Lambda)$ *не является ограниченной, то уравнение* (12) *имеет локальное нетривиальное* C^∞*-решение. Если же последовательность* $\sigma_k(\Lambda)$ *является ограниченной, то для существования локального нетривиального* C^∞*-решения уравнения* (12) *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ *и некоторых неотрицательных целых числах* $m_1, \ldots, m_n$ *выполнялось соотношение* $\alpha_i = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}$.

1. *Sternberg Sh.* On the structure of local homeomorphisms.— Amer. J. Math., 1959, **81**, N 3, p. 578—604.
2. *Chen K. T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point.— Amer. J. Math., 1963, **85**, № 4, p. 693—722.

3. *Белицкий Г. Р.* Функциональные уравнения и локальная сопряженность отображений класса C^∞.— Мат. сб., 1973, **91**, № 4, с. 565—579.
4. *Кучко Л. П.* О линейных функциональных уравнениях.— Вестн. Харьк.ун-та. Сер. мех.-мат., 1974, **39**, с. 1—13.
5. *Кучко Л. П.* Линейные функциональные уравнения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, **42**, № 2, с. 379—395.

Харьк. ун-т Получено 26.12.83