УДК 517.922

С. А. Яценко, Л. Г. Просенюк

О степенной асимптотике решений системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной

Будем рассматривать систему вида

$$t^{A}\frac{dX}{dt}=BX+\Phi(t)+X^{2}F\left(t,\ X,\frac{dX}{dt}\right), \tag{1}$$

где $t\in(0, t_0)$, $A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ и $B=\operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$ — постоянные матрицы, все $a_i>1$, $X=\operatorname{diag}(x_1,\ldots,x_n)$, $\Phi=\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, $F=\operatorname{diag}(f_1,\ldots$ $\ldots,f_n)$ — матричная функция, непрерывная и имеющая непрерывную частную производную по dX/dt в окрестности нулевых значений своих переменных.

Изучим вопрос о существовании и асимптотике решений уравнения (1), обладающих свойством: $X\to 0$ при $t\to+0$.

Уравнениям, не разрешенным относительно производной, посвящен ряд работ, например, [1—3]. Рассмотренный здесь случай уравнения, не разрешенного относительно производной, не изучался ранее.

Предположим, что:

1) уравнение $\frac{A}{t}\frac{dX}{dt} = BX + \Phi(t)$ имеет решение $W(t)$ с асимптотикой $W \sim Ct^D$, $dW/dt \sim CDt^{D-E}$ при $t \to +0$, E — единичная матрица, $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$, $d_i > a_i$;

2) среди чисел b_i есть m положительных, а остальные все отрицательные.

Сформулируем и докажем основной результат нашей работы.

Т е о р е м а. *Уравнение* (1) *имеет m-параметрическое семейство решений, для каждого из которых справедливы асимптотические представления*:

$$X(t) \sim Ct^D,\ dX(t)/dt \sim CDt^{D-E}, \qquad t \to +0. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем числа $k_i > 0$ так, чтобы $d_i - a_i - k_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. После этого в уравнение (1) вместо X и dX/dt введем новые переменные U и Y по формулам

$$X = W(t) + t^{A+K}U(t), \tag{3}$$

$$dX/dt = dW(t)/dt + t^K Y(t, U), \tag{4}$$

$$K = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n),\ U = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n),\ Y = \mathrm{diag}(y_1, \ldots, y_n).$$

Обозначив при этом для простоты $t^{-(A+K)}(W + t^{A+K}U)^2 = R$, $W(t) = R_1$, $t^{A+K} = R_2$, $\frac{dW}{dt} = R_3$, $t^K = R_4$, получим равенство

$$Y = BU + RF(t, R_1 + V_2U, R_3 + R_4Y). \tag{5}$$

Оно определяет неявную матричную функцию $Y(t, U, R, R_1, \ldots, R_4)$, непрерывную в окрестности нулевых значений своих аргументов. Покажем, что ее можно представить в виде

$$Y = BU + Y^0(t, U, R, R_1, \ldots, R_4),\ Y^0 = \mathrm{diag}(y_1^0, \ldots, y_n^0), \tag{6}$$

где

$$\| Y^0 t^{K-D+E(1-\varepsilon)} \| \to 0,\ t \to +0,\ 1 > \varepsilon > 0, \tag{7}$$

как только матрица U такова, что $\| Ut^{K-D+E(1-\varepsilon)} \|$ ограничена. В самом деле, подставляя (6) в (5), получаем $Y^0 \equiv RF(t, R_1 + R_2U, R_3 + R_4(BU + Y^0))$. Матричная функция F непрерывна в нуле, значит ее норма ограничена. Тогда (7) следует из вида R и связи между матрицами D, A, K.

Продифференцируем правую часть (3) и результат приравняем к правой части равенства (4). Получим $t^A dU/dt = Y - (A + K)t^{A-E}U$ или, с учетом (6),

$$t^A \frac{dU}{dt} = BU - (A + K)t^{A-E}U + Y^0. \tag{8}$$

Понятно, что решение дифференциального уравнения (8) после подстановки в (3) даст нам решение уравнения (1).

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что среди чисел b_i первые m положительные, а остальные отрицательные. Введем область

$$\Omega = \{(t, u_1, \ldots, u_n) : 0 < t < t_0,\quad u_i^2 - t^{2d_i - 2k_i - 2 + 2\varepsilon} \equiv \lambda_i < 0,$$
$$i = \overline{1, m},\ u_j^2 - t^{2d_j - 2k_j - 2 + 2\varepsilon} \equiv v_j < 0,\quad j = m + \overline{1, n}\}$$

и докажем, что каждая точка выхода из Ω — суть точка строгого выхода. На этом пути сначала установим, что Ω — (λ, v)-подмножество (см. [4, с. 335]) относительно уравнения (8), определяемое функциями λ_i, v_j.

Пусть Λ_α, V_β означают множества

$$\Lambda_\alpha = \{(t, u_1, \ldots, u_n) : \lambda_\alpha = 0,\ \lambda_i \leqslant 0,\ v_j \leqslant 0,\ i \neq \alpha\},$$
$$V_\beta = \{(t, u_1, \ldots, u_n) : v_\beta = 0,\ \lambda_i \leqslant 0,\ v_j \leqslant 0,\ j \neq \beta\}.$$

Вычислим $\dot{\lambda}_\alpha$ и $\dot{v}_3$ — производные вдоль траекторий системы (8). Так

$$\dot{\lambda}_\alpha = 2\left(b_\alpha u_\alpha^2 - (a_\alpha + k_\alpha)\, t^{a_\alpha - 1} u_\alpha^2 + y_\alpha^0 u_\alpha\right) t^{-a_\alpha} -$$

$$-2\,(d_\alpha - k_\alpha - 1 + \varepsilon)\, t^{2d_\rho - 2k_\rho - 1 - 2\varepsilon},\ \ \dot{v}_\beta = 2\left(b_\beta u_\beta^2 - (a_\beta + k_\beta)\, t^{a_\beta - 1} u_\beta^2 +\right.$$

$$\left. + y_y^0 u_\beta\right) t^{-a_\beta} - 2\,(d_\rho - k_\rho - 1 + \varepsilon)\, t^{2d_\rho - 2k_\rho - 1 + 2\varepsilon}.$$

Согласно (7) существует достаточно малое число $t_1 > 0$, при котором $\dot{\lambda}_\alpha > 0$, когда $(t, u_1, \ldots, u_n) \in \Lambda_\alpha$, и $\dot{v}_\beta < 0$, если $(t, u_1, \ldots, u_n) \in V_\beta$. Другими словами, Ω — не что иное, как (λ, v)-подмножество. А тогда, согласно лемме (см. [4, с. 336]), все точки выхода из Ω являются точками строгого выхода. При изменении направления оси t на противоположное Ω опять-таки будет обладать тем же свойством, причем, в силу упомянутой леммы, $\Omega_0 = \bigcup\limits_{\beta=m+1}^{n} V_\beta \diagdown \bigcup\limits_{\alpha=1}^{m} \Lambda_\alpha$ — множество всех точек строгого выхода из Ω.

Возьмем $S \subset \Omega \cup \Omega_0$,

$$S = \{(t_1, u_1^0, \ldots, u_m^0, u_{m+1}, \ldots, u_n) : (u_i^0)^2 < t_1^{2d_i - 2k_i - 2 + 2\varepsilon},$$

$$i = \overline{1, m},\ u_j^2 \leqslant t_1^{2d_j - 2k_j - 2 + 2\varepsilon},\ j = m + \overline{1, n}\}.$$

Тогда

$$S \cap \Omega_0 = \{(t_1, u_1^0, \ldots, u_m^0, u_{m+1}, \ldots, u_n) : (u_i^0)^2 < t_1^{2d_i - 2k_i - 2 + 2\varepsilon} \qquad i = \overline{1, m},$$

$$u_\beta^2 = t_1^{2d_\beta - 2k_\beta - 2 + 2\varepsilon},\ \ u_j^2 \leqslant t_1^{2d_j - 2k_j - 2 + 2\varepsilon},\ j \neq \beta,\ j, \beta = \overline{m + 1, n}\}.$$

Очевидно, что $S \cap \Omega_0$ образует границу S и не является ретрактом S. Последнее следует из утверждения (3.6) работы [5]. Остается доказать, что $S \cap \Omega_0$ — ретракт Ω_0. Построим отображение

$$(t, u_1, \ldots, u_n) \in \Omega_0 \to (t_1, u_1^0, \ldots, u_m^0, \ldots, u_j\,(t_1/t)^{d_i - k_i - 1 + \varepsilon}, \ldots), \qquad j = \overline{m + 1, n}.$$

Это отображение действует из Ω_0 в $S \cap \Omega_0$, является непрерывным и, кроме того, при таком отображении любая точка из множества $S \cap \Omega_0$ переходит в себя. Стало быть, $S \cap \Omega_0$ является ретрактом Ω_0. Теперь оказываются выполненными все условия следствия из теоремы Важевского (см. [4, с. 337]), из которого вытекает существование решения уравнения (8) с начальными данными из $S \cap \Omega_0$, график которого на интервале $(0, t_1)$ находится в Ω. Но постоянные $u_1^0, \ldots, u_m^0$ можно варьировать в пределах $(u_1^0)^2 < t_1^{2d_i - 2k_i - 2 + 2\varepsilon}$, $i = \overline{1, m}$, и, таким образом, решений, лежащих в Ω, получим целое семейство, зависящее от m параметров.

Подставляя эти решения в (3), будем получать решения уравнения (1). Справедливость асимптотического представления (2) для них следует из асимптотики функции $W(t)$, оценки найденных решений U уравнения (8) и оценки неявной функции Y. Теорема доказана.

1. *Даутов М. А., Муратов Л. М.* Асимптотическое представление решений полиномиального дифференциального уравнения первого порядка.— Изв. вузов. Математика, 1964, № 4, с. 61—68.
2. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных.—Там же, 1971, № 9, с. 79—84.
3. *Фильчаков П. Ф.* О построении интегралов дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1969, № 7, с. 606—611.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
5. *Борсук К.* Теория ретрактов.— М. : Мир, 1971.— 291 с.

Одес. инж.-строит. ин-т

Получено 30.08.83