УДК 519.41—47

Л. А. Курдаченко, А. В. Тушев

О некоторых классах групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп

Будем говорить, что группа удовлетворяет слабому условию минимальности или, короче, условию $\mathrm{Min}-\infty$ для нормальных подгрупп, если в ней не существует такой бесконечной убывающей цепочки нормальных подгрупп, все факторы которой бесконечны. Пусть G — локально нильпотентная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ для нормальных подгрупп, $G_{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех ее подгрупп конечного индекса, $t(G)$ — периодическая часть G. Из результатов работ [1 — 3] вытекает, что $G/G_{\mathfrak{F}}$ — минимаксная группа с конечной периодической частью, $G_{\mathfrak{F}} \leqslant t(G)$ и $G_{\mathfrak{F}}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\mathrm{G}$. Так как в классе локально нильпотентных групп условие $\mathrm{Min}-\infty$ для нормальных подгрупп переносится на подгруппы конечного индекса (см. [2]), то изучение строения G сводится к случаю, когда $t(G)$ не включает в себя собственных G-допустимых подгрупп конечного индекса. В общем случае задача описания строения G очень сложная. В настоящей работе это описание получено для групп свободного ранга 1 с абелевой периодической частью.

Пусть K_n — аддитивно записанная квазициклическая p-группа, $K_n \cong C_{p^\infty}$, $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $\varphi_n: K_n \to K_{n-1}$ — изоморфизм, $n > 1$. На C можно смотреть как на $\mathbb{Z}[(g)]$-модуль, (g) — бесконечная циклическая группа, если положить

$$a(1-g) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \in K_1, \\ a\varphi_n, \text{ если } a \in K_n,\ n > 1. \end{cases}$$

Модуль C назовем $g - C_{p^\infty}$-модулем. Его нижний слой $\Omega_1(C)$ будет $g - p$-модулем (см. [4]). В частности, $\Omega_1(C)$ удовлетворяет $\mathrm{Min}-(\mathrm{g})$. Из леммы 3.3 работы [5] следует, что C удовлетворяет $\mathrm{Min}-(\mathrm{g})$, т. е условию $\mathrm{Min}-(\mathrm{g})$ удовлетворяет и $\Omega_n(C)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\mathbb{Z}[(g)]$-модуль $\Omega_n(C)$ будет артиновым при любом $n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty$. Артиновым будет также $\mathbb{Z}[(g)]$-модуль $B_1 \oplus \ldots \oplus B_l$, где $B_i \cong \Omega_{n_i}(C)$, $n_i \in \mathbb{N}$ или $n_i = \infty$, $p \in \pi$, π — некоторое множество простых чисел. О таких модулях будем говорить, что они допускают $g - C_{p^n}$-разложение.

Пусть A — правый модуль над кольцом K с единицей, $x \in K$, B—подмодуль A. Положим $B(1-x) = \{b(1-x) \mid b \in B\}$. Если K коммутативно, то $B(1-x)$ — подмодуль A. Модуль A назовем гиперцентральным или, точнее, K-гиперцентральным, если A обладает таким рядом подмодулей $0 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots A_\gamma = A$, что $A_{\alpha+1}(1-x) \leqslant A_\alpha$ при любом $x \in K$, $\alpha < \gamma$.

Модуль A назовем p-модулем, если его аддитивная группа является p-группой, p — простое число. Модуль A назовем $\mathbb{Z}$-делимым (см. [5]), если его аддитивная группа является делимой. Модуль A назовем $\mathfrak{F}$-совершенным (см., например, [6]), если он не включает в себя собственных подмодулей конечного индекса. Наконец, бесконечный подмодуль B модуля A назовем бесконечно неприводимым (см. [7]), если всякий собственный подмодуль B конечен. Если A — абелева p-группа, то через $\Omega_n(A)$ будем обозначать ее подгруппу, составленную из элементов порядка не больше p^n, $\Omega_\infty(A) = A$.

Лемма 1. *Пусть A — гиперцентральный p-модуль над $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа, B — $g - p$-подмодуль A. Тогда $\Omega_1(A) = B \oplus D$ для некоторого подмодуля D.*

Доказательство. Пусть D — максимальный подмодуль $\Omega_1(A)$, имеющий с B нулевое пересечение. Предположим, что $\Omega_1(A) \neq B \oplus D$. Тогда из гиперцентральности модуля A следует существование такого элемента $a \in \Omega_1(A) \setminus B \oplus D$, что $a(1-g) \in B \oplus D$. Имеем $a(1-g) = b + d$, $b \in B$, $d \in D$. Из соотношения $B = B(1-g)$ вытекает равенство $в = в_1(1-g)$, $в_1 \in B$. Положим $a_1 = a - в_1$. Тогда $a_1 \notin B \oplus D$ и $a_1(1-g_1) = (a-b_1)(1-g) = в + d - в = d$, т. е. $a_1(1-g) \in D$. Тогда $D_1 = D \oplus (a_1)$— подмодуль A и $D_1 \cap B = 0$, так что получаем противоречие с максимальностью подмодуля D. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть A — гиперцентральный p-модуль на $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$— бесконечная циклическая группа, B — его подмодуль, разложимый в прямую сумму конечного числа g — p-подмодулей. Тогда $\Omega_1(A) = B \oplus D$ для некоторого подмодуля D.*

Лемма 2. *Пусть A — гиперцентральный $\mathfrak{F}$-совершенный p-модуль на $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$— бесконечная циклическая группа. Если период A конечен и $\Omega_1(A)$ — g — p-модуль, то A — g — C_{p^n}-модуль.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по периоду A. Если $A = \Omega_1(A)$, то все доказано. Пусть период A больше p. По индуктивному предположению $A/\Omega_1(A)$ — g — $C_{p^{n-1}}$-модуль, т. е. $A/\Omega_1(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (\bar{a}_k)$, причем $|\bar{a}_k| = p^{n-1}$, $\bar{a}_1(1-g) = 0$, $\bar{a}_k = \bar{a}_{k+1}(1-g)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть a_1 — элемент, для которого $a_1 + \Omega_1(A) = \bar{a}_1$. Тогда $a_1(1-g) \in \Omega_1(A)$, а потому $a_1(1-g) = b_1(1-g)$ для некоторого $b_1 \in \Omega_1(A)$. Положим $c_1 = a_1 - b_1$. Тогда $c_1(1-g) = 0$ и, очевидно, $|c_1| = p^n$. Кроме того, $c_1 + \Omega_1(A) = \bar{a}_1$. Обозначим через a_2 элемент, для которого $a_2 + \Omega_1(A) = \bar{a}_2$. Имеем $a_2(1-g) = c_1 + b_2$, где $b_2 \in \Omega_1(A)$. Снова $b_2 = b_3(1-g)$, $b_3 \in \Omega_1(A)$, и, полагая $a_2 - b_3 = c_2$, получаем $c_2(1-g) = c_1$. Используя аналогичные рассуждения, построим семейство таких элементов c_k, $k \in \mathbb{N}$, что $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (c_k)$, $|c_k| = p^n$, $c_1(1-g) = 0$, $c_{k+1}(1-g) = c_k$. Таким образом, A—g — C_{p^n}-модуль. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A—гиперцентральный $\mathbb{Z}$-делимый p-модуль над $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа, $\Omega_1(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, где B_i — g — p-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда существует такой подмодуль C, что $C \cap \Omega_1(A) = B_1$, и C — g — C_{p^∞}-модуль.*

Доказательство. Пусть $B_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (a_{1n})$, где $a_{11}(1-g) = 0$, $a_{1n+1}(1-g) = a_{1n}$. Предположим, что уже найдены элементы a_{kn}, которые удовлетворяют следующим условиям: $|a_{kn}| = p^k$, $a_{k1}(1-g) = 0$, $a_{kn+1}(1-g) = a_{kn}$, $pa_{kn} = a_{k-1n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как A — делимая группа, то найдется элемент b, удовлетворяющий уравнению $px = a_{k1}$. Тогда $pb(1-g) = a_{k1}(1-g) = 0$, т. е. $b(1-g) \in \Omega_1(A)$. Поскольку $\Omega_1(A)(1-g) = \Omega_1(A)$, то $b(1-g) = c(1-g)$, $c \in \Omega_1(A)$. Значит, $(b-c)(1-g) = 0$ и $p(b-c) = pb = a_{k1}$. Положим $b - c = a_{k+11}$. Пусть теперь b_1 — решение уравнения $px = a_{k2}$. Тогда $pb_1(1-g) = a_{k2}(1-g) = a_{k1} = pa_{k+11}$ и $b_1(1-g) - a_{k+11} \in \Omega_1(A)$. Снова найдется элемент $c_1 \in \Omega_1(A)$, для которого $b_1(1-g) - a_{k+11} = c_1(1-g)$. Итак $(b_1 - c_1)(1-g) = a_{k+11}$ и $p(b_1 - c_1) = pb_1 = a_{k2}$. Полагаем $b_1 - c_1 = a_{k+12}$. Аналогично находятся остальные элементы a_{k+1n}, $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $K_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_{nt})$. Тогда $K_t \cong C_{p^\infty}$ и $C = \bigoplus_{t \in \mathbb{N}} K_t$ — g — C_{p^∞}-модуль. Из его построения следует равенство $C \cap \Omega_1(A) = B_1$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A — гиперцентральный p-модуль над кольцом $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ —бесконечная циклическая группа, B — $\mathbb{Z}$-делимый подмодуль A, причем $\Omega_1(B) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, где B_i — g — p-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда существует такой подмодуль D, что $A = B \oplus D$.*

Доказательство. Из следствия леммы 1 получаем равенство $\Omega_1(A) = \Omega_1(B) \oplus E$, E — подмодуль A. Обозначим через D максимальный среди подмодулей, включающих в себя E и имеющих с $\Omega_1(B)$ нулевое пересечение. Так как $B + D/D$ — делимая подгруппа, то $A/D = B + D/D \oplus T/D$ для некоторой подгруппы T. Имеем $\Omega_1(A/D) = \Omega_1(B) + D/D \oplus \Omega_1(T/D)$. Если предположить, что подгруппа T/D ненулевая, то следствие леммы 1 обеспечивает существование такого ненулевого подмодуля V/D, что $\Omega_1(T/D) \oplus \Omega_1(B) + D/D = \Omega_1(B) + D/D \oplus V/D$. Но это противо речит максимальности D. Следовательно, $T = D$, т. е. $A = B \oplus D$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A — гиперцентральный p-модуль над $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа, B — $\mathbb{Z}$-делимый подмодуль A, причем $\Omega_1(B) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, где B_i — g — p-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда существуют такие g — C_{p^∞}-подмодули T_i, что $B = T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$.*

Доказательство. Используем индукцию по k. Если $k = 1$, то из леммы 3 следует, что B — g — C_{p^∞}-подмодуль. Пусть $k > 1$. Из леммы 3 получаем существование такого g — C_{p^∞}-подмодуля $T_1 \leqslant B$, что $T_1 \cap \Omega_1(B) = B_1$. Из леммы 4 следует разложение $B = T_1 \oplus U$, где U — подмодуль A. Далее, $\Omega_1(U) \simeq \Omega_1(U) / \Omega_1(U) \cap T_1 \simeq \Omega_1(U) + T_1 / T_1 = \Omega_1(B) + T_1 / T_1 \simeq \Omega_1(B) / \Omega_1(B) \cap T_1 = \Omega_1(B) / B_1 \cong B_2 \oplus \ldots \oplus B_k$. Индуктивное предположение показывает тогда, что $U = T_2 \oplus \ldots \oplus T_k$, где T_i — g — C_{p^∞}-подмодуль, $2 \leqslant i \leqslant k$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть A — гиперцентральный $\mathfrak{F}$-совершенный p-модуль над $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа, $\Omega_1(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, где B_i — g — p-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$. Если период A конечен, то A включает в себя такой конечный подмодуль F, что $A/F = T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$, T_i — g — $C_{p^{n_i}}$-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. При $k = 1$ утверждение следует из леммы 2. Предположим, что $k > 1$. Пусть p^n — период A. Тогда хотя бы в одном подмодуле B_i найдется элемент $в$, для которого уравнение $p^{n-1} x = в$ разрешимо. Можно считать, что $в \in B_1$. Обозначим через D максимальный среди подмодулей, включающих в себя $B_2 \oplus \ldots \oplus B_k$ и имеющих с B_1 нулевое пересечение. Из леммы 1 вытекает, что $\Omega_1(A/D) = B_1 + D/D$. Из включения $в \in B_1$ получаем, что A/D содержит элемент порядка p^n. Из леммы 2 следует тогда, что A/D — g — C_{p^n}-модуль. В частности, A/D — прямая сумма циклических групп порядка p^n. Поэтому существует подгруппа E, для которой $A = D \oplus E$. Из леммы 3.3 [5] следует, что модуль D артинов. Обозначим через $D_{\mathfrak{F}}$ пересечение всех его подмодулей конечного индекса. Тогда $| D : D_{\mathfrak{F}} |$ конечен, в частности $D = D + F_1$ для некоторой конечной подгруппы F_1. Из гиперцентральности A нетрудно получить конечность $\mathbb{Z}[G]$-подмодуля F_2, порожденного F_1; D/F_2 — $\mathfrak{F}$-совершенный модуль, и по индуктивному предположению D/F_2 включает в себя такой конечный подмодуль F/F_2, что $D/F = T_2 \oplus \ldots \oplus T_k$, где T_i — g — $C_{p^{n_i}}$-подмодуль A/F, $2 \leqslant i \leqslant k$. Будем считать F нулевым.

Положим $V = D/pD$, $U = A/pD$. Тогда U включает в себя подгруппу E_1, для которой $U = V \oplus E_1$. Подмодуль V разлагается в прямую сумму $k - 1$ g — p-подмодулей. Из разложения $U = V \oplus E_1$ следует, что $pU = pE_1$. Из следствия леммы 1 получаем существование подмодуля E_2/pU, для которого $U/pU = (V + pU/pU) \oplus E_2/pU$, т. е. $U = V + E_2$, $V \cap E_2 = pU$. Обозначим через E_3 полный прообраз в A подмодуля E_2. Из изоморфизма $E_3/pD \simeq E$ следует, что E_3/pD — прямая сумма циклических групп порядка p^n, т. е. $E_3 = pD \oplus E_4$ для некоторой подгруппы E_4. Используя рассуждения, приводимые выше, получаем подмодуль E_5, для которого $E_3 = pD + E_5$ и $pD \cap E_5 = p^2 D$. Но тогда $A = D + E_5$ и $D \cap E_5 = p^2 D$. Рассуждая аналогично и учитывая конечность периода A, через конечное число шагов находим подмодуль T_1, для которого $A = D \oplus T_1$. Далее, $\Omega_1(T_1) \simeq \Omega_1(T_1)/\Omega_1(T_1) \cap \Omega_1(D) \cong \Omega_1(T_1) + \Omega_1(D)/\Omega_1(D) = \Omega_1(A)/\Omega_1(D) \simeq B_1$. Поскольку $T_1 \cong A/D$, то T_1 — $\mathfrak{F}$-совершенный модуль, и из леммы 2 получаем, что T_1 — g — $C_{p^{n_1}}$-подмодуль. Лемма доказана.

Модуль назовем черниковским, если его аддитивная группа является черниковской (см., например, [8, 9]).

Теорема 1. *Пусть A — гиперцентральный $\mathfrak{F}$-совершенный артинов p-модуль над $\mathbb{Z}[G]$, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа, p — простое число. Тогда A включает в себя такой черниковский подмодуль F, что $A/F = T_1 \oplus \ldots \oplus T_k$, где T_i — g — $C_{p^{n_i}}$-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n_i \in \mathbb{N}$ или $n_i = \infty$.*

Доказательство. Обозначим через D делимую часть A. Так как D артинов, то если $\Omega_1(D)$ бесконечен, то он включает в себя бесконечно неприводимый подмодуль B_1. В частности, $B_1(1-g) = B_1$ и нетрудно показать, что $B_1 - g - p$-подмодуль. Из леммы 1 получаем разложение $\Omega_1(D) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \oplus F_1$, где $B_i - g - p$-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant m$, F_1 — конечный подмодуль. Через F_2 обозначим максимальный среди подмодулей D, включающих в себя F_1 и имеющих с $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ нулевое пересечение. Очевидно, $\Omega_1(D/F_2) \cong B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ и $\Omega_1(F_2) = F_1$. В частности, подмодуль F_2 черниковский. Рассмотрим A/F_2. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать F_2 нулевым. Из леммы 4 получаем разложение $A = D \oplus E$, где E — подмодуль A. Так как A артинов, то E имеет конечный период. Ясно также, что E — $\mathfrak{F}$-совершенный модуль. Из леммы 6 нетрудно получить существование конечного подмодуля F, для которого $E/F = T_{m+1} \oplus \ldots \oplus T_k$, где $T_i - g - C_{p^{n_i}}$-модуль, $n_i \in \mathbb{N}$, $m+1 \leqslant i \leqslant k$. Из леммы 5 получаем разложение $D = T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$, где $T_i - g - C_{p^\infty}$-подмодуль, $1 \leqslant i \leqslant m$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$ — два $g - C_{p^n}$-разложения $\mathbb{Z}[G]$-модуля A, $G = (g)$ — бесконечная циклическая группа. Тогда $n = k$ и существуют подстановка π степени n и автоморфизм α модуля A, для которых $B_i\alpha = A_{i\pi}$.*

Отметим, что сумма двух необратимых эндоморфизмов $g - C_{p^n}$-модуля будет необратимым эндоморфизмом, $n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty$. В самом деле, этот модуль монолитичен, а потому ядро всякого необратимого эндоморфизма включает в себя монолит, в частности ядро суммы двух таких эндоморфизмов ненулевое. Теперь достаточно повторить доказательство теоремы 1 § 2 гл. VIII книги [10], используя вместо предложения 4 только что отмеченное свойство.

Лемма 7. *Пусть A — абелева нормальная p-подгруппа гиперцентральной группы G, p — простое число, $C = G/C_G(A)$. Если $C^p = C$, то $A \leqslant \zeta(G)$.*

Доказательство. Если $A \not\leqslant \zeta_1(G)$, то $A\zeta_1(G)/\zeta_1(G)$ имеет с $\zeta_2(G)/\zeta_1(G)$ неединичное пересечение. Пусть $a \in A \cap \zeta_2(G) \setminus \zeta_1(G)$, причем $a^p \in \zeta_1(G)$. Тогда $(1) \neq [G, a] \leqslant \zeta_1(G)$ и $[G, a]$ — элементарная абелева p-подгруппа. Из изоморфизма $[G, a] \cong G/C_G(a)$ и включения $C_G(A) \leqslant C_G(a)$ следует, что C имеет подгруппы индекса p, а это противоречит условию. Следовательно, $A \leqslant \zeta(G)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — гиперцентральная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ для нормальных подгрупп, $A = G/t(G)$, π — множество простых чисел. Если $A = A^p$ для любого $p \in \pi$, то силовская π-подгруппа G черниковская.*

Доказательство. Так как множество $\Pi(G)$ конечно, то достаточно показать, что силовская p-подгруппа G черниковская для любого $p \in \pi$. Можно считать поэтому, что $t(G) = T$ — p-группа. Обозначим через T_1 пересечение всех подгрупп, имеющих в T индекс p. Из леммы 7 получаем включение $T/T_1 \leqslant \zeta(G/T_1)$, так что T/T_1 конечна.

Из леммы 3 работы [1] следует конечность $T/T_{\mathfrak{F}}$, где $T_{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех подгрупп конечного индекса из T. Это означает, что $T_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-совершенная подгруппа. Будучи гиперцентральной, она абелева ввиду теоремы С. Н. Черникова (см., например, [6, теорема 9.23]). Так как G/T минимаксна ([1, теорема 2]), то существует подгруппа без кручения $U/T_{\mathfrak{F}}$ конечного индекса (см., например, лемму 3 работы [11]). В частности, $U/T_{\mathfrak{F}} = (U/T_{\mathfrak{F}})^p$ и из леммы 7 получаем включение $T_{\mathfrak{F}} \leqslant \zeta(U)$. Положим $L = \Omega_1(T_{\mathfrak{F}})$. Из конечности индекса $|G : C_G(L)|$ и леммы 4 работы [1] получаем конечность L. Это означает, что $T_{\mathfrak{F}}$, а вместе с ней и T — черниковская группа. Лемма доказана.

Пусть A — абелева группа без кручения ранга 1. Множество $\mathrm{Sp}\, A$ тех простых p, для которых $A = A^p$, назовем спектром A.

Лемма 9. *Пусть G — локально нильпотентная группа, $t(G)$ абелева, $A = G/t(G)$ — группа ранга 1, g — элемент, для которого $\Pi(G/\mathrm{гр}(g, t(G)) = \mathrm{Sp}\, A$ $y \in G \setminus \mathrm{гр}(g, t(G))$. Если $\Pi(G) \cap \mathrm{Sp}\, A = \varnothing$, то $a^y = a^{g^s}$ для любого $a \in t(G)$.*

Доказательство. Пусть $H = \text{гр}(g, a)$, $L = \text{гр}(H, y)$. Очевидно, L — расширение конечной группы с помощью бесконечной циклической, так что $\zeta(L)$ включает в себя такую бесконечную циклическую подгруппу U, что L/U — конечная π-группа, $\pi = \Pi(G)$. В частности, $y^t \in C_G(a)$, где t — π-число. Далее, $y^r = g^l b$, где r — π'-число, $b \in t(G)$. Из взаимной простоты чисел r и t следует равенство $ru + tv = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Тогда имеем $y^{-1}ay = y^{-ru-tv}ay^{tv+ru} = y^{-ru}ay^{ru} = g^{-s}ag^s$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — локально нильпотентная группа с условием* Min — ∞ *для нормальных подгрупп, $A = G/t(G)$ — группа ранга 1, $t(G)$ абелева и не включает в себя собственных G-допустимых подгрупп конечного индекса, $\pi = \Pi(G) \setminus \text{Sp}\, A$. Тогда G включает в себя такую черниковскую нормальную подгруппу F, что*

1) *$G/F = T \leftthreetimes H$, T — абелева π-группа, H — группа без кручения, причем все дополнения к T сопряжены;*

2) *если g — элемент H, для которого $\Pi(H/(g)) = \text{Sp}\, A$, то $\mathbb{Z}[(g)]$ — модуль T допускает g — C_{p^n}-разложение $T = T_1 \times \ldots \times T_n$;*

3) *если $T = R_1 \times \ldots \times R_k$ — другое g — C_{p^n}-разложение, то $k = n$ и существуют такая подстановка σ степени n и автоморфизм φ группы G/F, что $R_i\varphi = T_{i\sigma}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Положим $U = t(G)$. Ввиду [2] G гиперцентральна и U удовлетворяет Min — G. Из леммы 8 получаем, что силовская π'-подгруппа G черниковская. Чтобы не вводить новых обозначений, можно считать, что $\Pi(G) = \pi$. Пусть g — элемент, для которого $\Pi(G/\text{гр}(g, U)) = \text{Sp}\, A$. Ввиду леммы 9 для любого $y \notin \text{гр}(g, U)$ имеет место равенство $a^y = a^{g^s}$, $a \in U$. Поэтому U можно рассматривать как $\mathfrak{F}$-совершенный артинов $\mathbb{Z}[(g)]$ модуль. Из теоремы 1 следует существование такой черниковской подгруппы $F_1 \lhd G$, что $[gF_1, U/F_1] = U/F_1$. Чтобы избежать новых обозначений, положим $F_1 = (1)$, т. е. $[g, U] = U$. Пусть $(g) = Z$, $P = U \leftthreetimes Z$, y — элемент, для которого $P = U \leftthreetimes (y)$. Тогда $y = g^k u$, $u \in U$, $k = \pm 1$. Если $k = 1$, то из равенства $U = [g, U]$ следует $u = [g, u_1]$, $u_1 \in U$, и $y = g[g, u_1] = g^{u_1}$. Если же $k = -1$, то аналогично получаем сопряженность g^{-1} и y. В любом случае подгруппы Z и (y) сопряжены. Пусть $x \in G \setminus P$. Тогда $Z^x = Z^{u_2}$ для некоторого $u_2 \in U$, т. е. $xu_2^{-1} \in N_G(Z)$ и $G = N_G(Z)P = N_G(Z)\, UZ = UN_G(Z)$. Далее, $F_2 = U \cap N_G(Z) = C_U(Z)$. Как отмечалось, U/F_2 можно рассматривать как артинов $\mathfrak{F}$-совершенный $\mathbb{Z}[(g)]$-модуль и потому ввиду теоремы 1 U/F_2 включает в себя черниковскую подгруппу F/F_2, для которой U/F обладает g — C_{p^n}-разложением. Ясно, что подгруппа F черниковская. Положим $T = U/F$, $H = N_G(Z)F/F$. Тогда $G/F = T \leftthreetimes H$. Пусть $T_1 \times \ldots \times T_n = R_1 \times \ldots \times R_k$ — два $\bar{g}$ — C_{p^n}-разложения T, $\bar{g} = gF$. Из теоремы 2 вытекает, что $k = n$ и существует такая подстановка σ степени n и модульный автоморфизм α, что $R_i\alpha = T_{i\sigma}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Будучи модульным автоморфизмом, α перестановочен с автоморфизмом, индуцированным элементом $\bar{g}$, а так как ввиду леммы 9 $b^y = b^{\bar{g}^s}$ для любого $b \in T$, $y \in H \setminus (\bar{g})$, то α перестановочен с автоморфизмом, индуцированным на T любым элементом H. Отсюда следует, что отображение $\varphi: bh \to b\alpha \cdot h$, $b \in T$, $h \in H$, будет автоморфизмом G/F, продолжающим α. Осталось доказать сопряженность дополнений к T. Пусть $G/F = T \leftthreetimes M$, M_1 — полный прообраз в G подгруппы M. Так как P/T — бесконечная циклическая группа, то $M_1 \cap P = (M_1 \cap U) \leftthreetimes V$, V — бесконечная циклическая. Из соотношения $M_1 \cap U \lhd G$ следует равенство $N_G(M_1 \cap P) = N_G(V)$, а поскольку $P \lhd G$, то $N_G(M_1 \cap P) \geqslant M_1$. Далее, $P = U(M_1 \cap P) = U(M_1 \cap P)V = UV$, и из доказанного выше следует равенство $V^{u_3} = Z$ для некоторого $u_3 \in U$. Тогда $N_G(Z) = N_G(V^{u_3}) = N_G(V)^{u_3} = N_G(M_1 \cap P)^{u_3} \geqslant M_1^{u_3}$, т. е. $N_G(Z) \geqslant M_1^{u_3}$. В фактор-группе G/F имеем тогда $H \geqslant M^{b_2}$, где $b_2 = u_3F$. Но $G/F = T \leftthreetimes M^{b_2}$, и если $h \in H$, то $h = b_3 m$, $b_3 \in T$, $m \in M^{b_2}$. Отсюда следует, что $m \in H$ и $b_3 \in H \cap T = (1)$. Следовательно, $H = M^{b_2}$. Теорема доказана.

Отметим, что теорему 3 нельзя расширить на локально нильпотентные группы свободного ранга $\geqslant 2$. В работе [2] построена гиперцентральная группа $G = T \leftthreetimes ((g_1) \times (g_2))$ с условием Min — ∞ для нормальных подгрупп, где $T = \underset{n,k \in \mathbb{N}}{\mathsf{X}} (a_{nk})$ — элементарная абелева p-группа и $a_{k1}^{g_1} = a_{k1}$, $a_{kn+1}^{g_1} = a_{kn}a_{kn+1}$, $a_{1k}^{g_2} = a_{1k}$, $a_{n+1k}^{g_2} = a_{nk}a_{n+1k}$, $n, k \in \mathbb{N}$. В частности, $\zeta(G) = (a_{11})$, так что $\mathbb{Z}[(g_1) \times (g_2)]$-модуль T неразложим. Таким образом, гиперцентральные артиновы неразложимые модули над абелевой группой без кручения ранга $\geqslant 2$ имеют более сложное строение, чем модули над группой ранга 1.

1. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1979, **20**, № 5, с. 1068—1076.
2. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп.— Там же, 1984, **25**, № 4, с. 99—106.
3. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием максимальности для нормальных подгрупп.— В кн.: VII Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. сообщ. Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1980, с. 62.
4. *Зайцев Д. И.* Группы с дополняемыми нормальными подгруппами.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 30—74.
5. *Hartley B., McDougall D.* Injective modules and soluble groups satisfying the minimal condition for normal subgroups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **4**, N 1, p. 113—135.
6. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups. Pt. 2.— Berlin etc. : Springer, 1972.— 254 p.
7. *Зайцев Д. И.* Бесконечно неприводимые нормальные подгруппы.— В кн.: Строение групп и свойства подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978, с. 17—38.
8. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах.— В кн.: Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 72—130.
9. *Hartley B.* A dual approach to Černikov modules.— Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1977, **82**, N 2, p. 215—239.
10. *Бурбаки Н.* Алгебра : Модули, кольца, формы.— М. : Наука, 1966.— 556 с.
11. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп.— Укр. мат. журн., 1981, **23**, № 5, с. 652—660.

Днепропетр. ун-т

Получено 10.01.83,
после доработки — 20.02.84