УДК 517.53

В. А. Зморович, И. К. Коробкова

О некоторых классах аналитических функций, связанных с производной Шварца

В настоящей заметке введены некоторые классы аналитических (вообще мероморфных) в круге $E(z:|z|<1)$ функций, удовлетворяющих условию

$$|\{f, z\}| \leqslant F(r), \quad |z| = r, \tag{1}$$

где $\{f, z\} = f'''(z)/f'(z) - 3/2\,[f''(z)/f'(z)]^2$ — (производная Шварца, или шварциан), $F(z)$ — некоторая заданная голоморфная в E функция, обладающая свойством $|F(z)| \leqslant F(|z|)$ $\forall z \in E$. Класс таких функций обозначим $Q(F)$. Если $f(z) \in Q(F)$, то $f(z)$ либо голоморфна в E, либо мероморфна в E, причем полюсы только первого порядка (так как только такие полюсы могут быть в силу (1)).

Через $Q_0(F)$ обозначим подкласс $Q(F)$, функции которого удовлетворяют условиям:

1) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$;

2) на каждой окружности $|z| = r$ круга $|z| < r_0 \leqslant 1$, в котором функция $f(z)$ голоморфна, точки одноименных абсолютных экстремумов функций $|f'(z)|$ и $W = \mathrm{Re}\,[1 + zf''(z)/f'(z)]$ совпадают.

Для функций класса $Q_0(F)$, обладающих общим кругом голоморфности $|z| < r_0 \leqslant 1$, в настоящей работе устанавливаются точные оценки величин W, $|f'(z)|$, $|f(z)|$, а также уравнение, определяющее радиус наибольшего круга с центром в точке $z = 0$, в котором эти функции принадлежат классу однолистных выпуклых функций. При различных выборах функции $F(z)$ получаются разные классы функций в E. В частности, если $F(z) = 2/(1 - z^2)^2$, то по критерию однолистности Нехари [1] все голоморфные в E функции класса $Q_0(F)$ однолистны в этом круге. Обратная теорема, как известно, неверна, так что изучение функций класса $Q_0(F)$ представляет интерес также с точки зрения теории однолистных в E функций.

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если* $f(z) \in Q_0(F)$, *то*

$$f_1(r) \leqslant |f(z)| \leqslant f_2(r), \tag{2}$$

$$f_1'(r) \leqslant |f'(z)| \leqslant f_2'(r), \tag{3}$$

$$1 + rf_1''(r)/f_1'(r) \leqslant \mathrm{Re}\,[1 + zf''(z)/f'(z)] \leqslant 1 + rf_2''(r)/f_2'(r), \tag{4}$$

где

$$r = |z|, \quad f_k(z) = c_k^2\,\psi_{k1}(z)\Big/\left[c_k + (-1)^{k-1}\int_0^z \psi_{k0}(\xi)\,d\xi\right]^2,$$

$$\psi_{k0}'(r) + (-1)^{k-1}\psi_{k0}^2(r)/2 = F(r),\ c_k > 0,$$

$$\psi_{k0}(0) + 2/c_k = |f''(0)|, \quad k = 1,2.$$

Оценки точные и реализуются функциями $f_k(z)$ класса $Q_0(F)$, причем все оценки, кроме нижней в (2), верны в круге голоморфности функции $f(z)$, а нижняя оценка в (2) — в круге однолистности функции $f(z)$.

Доказательство. Вводя обозначения $W = 1 + zf''(z)/f'(z) = R + iI$, где $R = \operatorname{Re} W$, $I = \operatorname{Im} W$, $z = r\exp(i\varphi)$, можно представить (1) в виде

$$|2\partial I/\partial\varphi - R^2 + I^2 + 1 - 2i[\partial R/\partial\varphi + RI]| \leqslant 2r^2 F(r),$$

откуда

$$|2\partial I/\partial\varphi - R^2 + I^2 + 1| \leqslant 2r^2 F(r), \tag{5}$$

$$|\partial R/\partial\varphi + IR| \leqslant r^2 F(r). \tag{6}$$

Рассматривая эти неравенства на окружности $|z| = r$ в круге голоморфности функции $f(z)$ и предполагая, что точка $z = r\exp(i\varphi)$ есть точка абсолютного экстремума функции R на этой окружности, вместо неравенств (5) и (6) получаем только одно неравенство

$$|2rd\tilde{R}/dr - R^2 + 1| \leqslant 2r^2 F(r). \tag{7}$$

Здесь $\tilde{R}$ — абсолютный экстремум (максимум или минимум) функции R на окружности $|z| = r$, рассматриваемый как функция радиуса r. Так как $\tilde{R}$ — абсолютно непрерывная функция r, то производная $d\tilde{R}/dr$ существует почти везде на $[0, r_0[$, $0 \leqslant r < r_0 \leqslant 1$, и интегрируема по Лебегу. Что касается неравенства (6), то на основании свойства 2 функций класса $Q_0(F)$ оно превратилось в $1 > 0$.

Для дальнейшего нужно уточнить вид абсолютного экстремума $\tilde{R}$. Предположим, что $\tilde{R}$ — абсолютный минимум, и пусть

$$\tilde{R} = 1 - r\psi(r), \tag{8}$$

где $\psi(r) > 0$ и тоже абсолютно непрерывна на $[0, r_0[$. На основании (8) неравенство (7) примет вид $|\psi'(r) + \psi^2(r)/2| \leqslant F(r)$, откуда

$$\psi'(r) + \psi^2(r)/2 \leqslant F(r). \tag{9}$$

Представим теперь функцию $F(r)$ в виде

$$F(r) = \psi_{10}'(r) + \psi_{10}^2(r)/2. \tag{10}$$

Здесь $\psi_{10}(r)$ — общий интеграл уравнения Риккати $y' = F(r) - y^2/2$, который, поскольку функция $F(z)$ голоморфна в E, очевидно, тоже можно считать голоморфной в E функцией, принимающей действительные значения в интервале $[0, r_0[$.

Если теперь с учетом (10) положить

$$\psi(r) = \psi_{10}(r) + 1/\lambda(r), \tag{11}$$

где $\lambda(r) > 0$ в $[0, r_0[$, то из (9) получим $\lambda'(r) - \psi_{10}(r)\lambda(r) \geqslant 1/2$, откуда

$$2\psi_{11}(r)\lambda(r) \geqslant c_1 + \int_0^r \psi_{11}(\rho)\,d\rho, \tag{12}$$

где $c_1 > 0$, $\psi_{11}(r) = \exp\left(\int_0^r \psi_{10}(\rho)\,d\rho\right)$, $2\lambda(0) = c_1$.

Из (8), (11), (12) найдем

$$R \geqslant \tilde{R} \geqslant 1 - r\psi_{10}(r) - 2r\psi_{11}(r)\left[c_1 + \int_0^r \psi_{11}(\rho)\,d\rho\right]^{-1} = I_1(r). \tag{13}$$

Это и есть, как легко убедиться, нижняя оценка в (4). Для получения верхней оценки в (4) нужно считать $\tilde{R}$ абсолютным максимумом R на окружности $|z| = r$ и положить $\tilde{R} = 1 + r\tilde{\psi}(r)$, $F(r) = \psi_{20}'(r) - \psi_{20}^2(r)/2$, $\tilde{\psi} \times (r) = \psi_{20}(r) + 1/\mu(r)$, где $\mu(r) > 0$ на $[0, r_0[$. Затем исходя из неравенства $\tilde{\psi}'(r) - \psi^2(r)/2 \leqslant F(r)$ и рассуждая так же, как при выводе нижней оценки, получаем $R \leqslant \tilde{R} \leqslant 1 + r\psi_{20}(r) + 2r\psi_{21}(r)\left[c_2 - \int_0^r \varphi_{21}(\rho)\,d\rho\right]^{-1}$, что, как нетрудно проверить, является верхней оценкой в (4). Точность оценки следует из того, что функции $f_k(z)$, удовлетворяя условиям 1, 2, для функций класса $Q_0(F)$, удовлетворяют также условию $|\{f_k, z\}| = F(r)$, в чем тоже легко убедиться. Для доказательства оценок (3) нужно заметить, что $R = 1 + r\partial(\ln|f'|)/\partial r$. Поэтому в точке на окружности $|z| = r$, где R достигает своего абсолютного минимума и, следовательно, функция $|f'(z)|$ тоже, имеем $\tilde{R} = 1 + rd(\ln m)/dr$, где m обозначает абсолютный минимум $|f'(z)|$. Поэтому на основании (13) $d(\ln m)/dr \geqslant (I_1(r) - 1)/r$, откуда

$$|f'(z)| \geqslant m \geqslant \psi_{11}(r)\Big/\left[c_1 + \int_0^r \psi_{11}(\rho)\,d\rho\right]^2 = f_1'(r).$$

Аналогично получается и верхняя оценка в (3). Оценки (2) являются следствиями соответствующих оценок (3) и получаются из них так, как, например, показано в [2] для сходного случая.

В заключение следует заметить, что радиус выпуклости множества функций класса $Q_0(F)$ с общим кругом голоморфности является единственным в $[0, 1[$ корнем уравнения $I_1(r) = 0$, где $I_1(r)$ определяется формулой (13). Если это уравнение не имеет корня, то функции выпуклы в их общем круге голоморфности.

1. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and Schlicht functions.— Trans. Amer. Math., Soc., 1955, **6**, p. 545—551.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексной переменной.— М. : Наука, 1966.— 52 с.

Киев. политехн. ин-т Получено 18.04.84