УДК 517.94

Хоанг Куок Тоан, Нгуен Вьет Чьеу Тиэн

Некоторые неэллиптические граничные задачи для системы эллиптических уравнений второго порядка с главной частью в виде оператора Лапласа

1. Введение. Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in R^2$ с достаточно гладкой границей Γ систему уравнений второго порядка с главной частью в виде оператора Лапласа

$$Lu \equiv \Delta u + Au_x + Bu_y + Cu = f, \tag{1.1}$$

где $A=(A_{ij})$, $B=(B_{ij})$, $C=(C_{ij})$ являются 2×2-матрицами, $f=(f_1, f_2)$. К (1.1) добавляются граничные условия

$$Bu \equiv au_x + bu_y + cu = g, \tag{1.2}$$

где $a=(a_{ij})$, $b=(b_{ij})$, $c=(c_{ij})$ — 2×2-матрицы, $g=(g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция на Γ.

Задачи Дирихле и Пуанкаре для эллиптических уравнений исследовались рядом авторов. Так, например, в [1] дано условие нетеровости задачи (1.1), (1.2) в пространствах гладких функций: при вещественных матрицах a, b из класса $C^{(0,h)}(\Gamma)$ таким условием является

$$\det(a+ib)\neq 0. \tag{1.3}$$

Целью настоящей работы является изучение некоторых неэллиптических задач вида (1.1)—(1.2): при определенных условиях устанавливается нетеровость этих задач в пространствах Соболева. Такие результаты в общем виде получены в [2]. Однако представляется целесообразным получить их в явном виде, используя метод «эллиптификации», т. е. приведения рассматриваемых задач к эллиптическим. При этом получаются элементарные формулы, показывающие роль младших членов в уравнениях и граничных условиях в вопросе нетеровости задач. Хотя дальше для простоты все коэффициенты считаются постоянными, формулировки остаются верными и для случая переменных коэффициентов, если задача будет равномерно неэллиптической по Вайнбергу-Грушину.

2. Условие эллиптичности задачи (1.1), (1.2). После стандартных выкладок (см. [3, 4]) получается следующая формулировка.

Предложение 2. 1. *Граничная задача* (1.1), (1.2) *эллиптична тогда и только тогда, когда*

$$\det(a+ib)\det(a-ib)\neq 0. \tag{2.1}$$

При этом имеет место априорная оценка

$$\|u\|_s \leqslant C\{\|Lu\|_{s-2} + \|Bu\|_{s-1-1/2} + \|u\|_{s-1}\}, \quad \forall s\geqslant 2, \quad \forall u\in C^\infty(\bar\Omega). \tag{2.2}$$

Заметим, что при вещественных a и b условие (2.1) и (1.3) одно и то же.

3. Первый случай неэллиптической задачи. Пусть с некоторым постоянным k выполнено условие

$$(a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}) = k(a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}). \tag{3.1}$$

Определим невырожденное преобразование

$$\tilde{B}u = \begin{pmatrix} (\tilde{B}u)_1 \\ (\tilde{B}u)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} Bu. \tag{3.2}$$

При этом получаем $(\tilde{B}u)_1 = (Bu)_1$ $(\tilde{B}u)_2 = (c_{22}-kc_{11})u_1 + (c_{22}-kc_{12})u_2$. В результате исходная задача (1.1), (1.2) сведена к задаче

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \tag{3.3}$$

$$(\tilde{B}u)_1 = g_1, \quad (\tilde{B}u)_2 = g_2 - kg_1 \text{ на } \Gamma. \tag{3.4}$$

для которой сразу может быть сформулировано условие эллиптичности.

Предложение 3.1. *Задача* (3.3), (3.4) *эллиптична тогда и только тогда, когда*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} \\ c_{21}-kc_{11} & c_{22}-kc_{12} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_{11}-ib_{11} & a_{12}-ib_{12} \\ c_{21}-kc_{11} & c_{22}-kc_{12} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{3.5}$$

Применяя теперь классическую теорию эллиптических задач и осуществляя обратное к (3.2) преобразование, получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть для граничной задачи* (1.1), (1.2) выполнены условия (3.1) и (3.5). Тогда оператор

$$P_s: H^s(\Omega) \times H^s(\Omega) \ni u \to (Lu,\ Bu) \in \mathcal{H}^{(s)}(\Omega, \Gamma),$$

где $\mathcal{H}^{(s)}(\Omega, \Gamma) = H^{s-2}(\Omega) \times H^{s-2}(\Omega) \times H^{s-1/2}(\Gamma) \times H^{s-1/2}(\Gamma)$, $\forall s \geqslant 2$, является Ф-оператором (в смысле Гохберга — Крейна). Иначе говоря, граничная задача (1.1), (1.2) в соответствующих пространствах нетерова. Кроме того, имеет место следующая априорная оценка:

$$\| u \|_s \leqslant C \{ \| Lu \|_{s-2} + \| Bu \|_{s-1/2} + \| u \|_{s-1} \}, \quad \forall s \geqslant 2, \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}). \tag{3.6}$$

Отметим, что по сравнению с эллиптическими задачами гладкость граничных данных в рассматриваемой задаче требуется на единицу больше.

4. В т о р о й с л у ч а й н е э л л и п т и ч е с к о й г р а н и ч н о й з а д а ч и. Прежде всего обозначим

$$Ru = \begin{pmatrix} u_{1x} - u_{2y} \\ u_{1y} - u_{2x} \end{pmatrix}, \quad R^* w = \begin{pmatrix} w_{1x} + w_{2y} \\ - w_{1y} + w_{2x} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\Delta u = R^* R u$ и систему (1.1) можно привести к эквивалентной ей системе первого порядка. Для этого обозначим $w_1 = u_{1x} - u_{2y}$, $w_2 = u_{1y} + u_{2x}$ (т. е. $w = Ru$), и в результате для вектор-функции (u_1, u_2, w_1, w_2) получаем систему уравнений

$$Ru = w, \quad R^* w + A u_x + B u_y + Cu = f. \tag{4.1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для a и b имеем место соотношение

$$(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) = (a_{12}, - a_{11}, a_{22}, - a_{21}). \tag{4.2}$$

При этом граничное условие (1.2) приводит к условию

$$aw + cu = g \text{ на } \Gamma. \tag{4.3}$$

Очевидно, что задачи (1.1), (1.2) и (4.1)—(4.3) эквивалентны. Отметим, что при условии (4.2) условие (2.1) не выполняется, а поэтому исходная задача неэллиптична. Однако задача (4.1)—(4.3) может оказаться эллиптичной. Положим

$$\alpha_j = a_{j1} + i a_{j2}, \qquad \gamma_j = i c_{j1} + c_{j2},$$

$$\bar{\alpha}_j = a_{j1} - i a_{j2}, \qquad \bar{\gamma}_j = - i c_{j1} + c_{j2}.$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *При условии* (4.2) *краевая задача* (4.1)—(4.3) *эллиптична тогда и только тогда, когда*

$$\alpha_+(A, B) \det a - \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \alpha_-(A, B) \det a - \det \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\gamma}_2 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.4}$$

где

$$\alpha_+(A, B) = \frac{1}{2} [(A_{11} + A_{22} - B_{21} + B_{12}) + i (A_{21} - A_{12} + B_{11} + B_{22})],$$

$$\alpha_-(A, B) = \frac{1}{2} [(A_{11} + A_{22} - B_{21} + B_{12}) - i (A_{21} - A_{12} + B_{11} + B_{22})].$$

Обозначим далее $\mathcal{H}^{(s)}(\Omega) = H^s(\Omega) \times H^s(\Omega)$, $\mathcal{H}^{(s-1/2)}(\Gamma) = H^{s-1/2}(\Gamma) \times H^{s-1/2}(\Gamma)$ и определим пространство $\mathcal{H}_R^{(s)}(\Omega)$ как пополнение по норме (см. [5]) $\| u \|_s^R = (\| u \|_s^2 + \| Ru \|_s^2)^{1/2}$, $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$.

Применяя к задаче (4.1)—(4.3) теорию эллиптических задач и возвращаясь к граничной задаче (1.1), (1.2), получаем следующий результат.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть для граничной задачи* (1.1), (1.2) *выполнены условия* (4.2) и (4.4). *Тогда оператор*

$$P_s: \mathcal{H}^{(s)}(\Omega) \ni u \to (Lu,\ Bu) \in \mathcal{H}^{(s-1)}(\Omega) \times \mathcal{H}^{(s-1/2)}(\Gamma)$$

является **Ф**-*оператором*, $\forall s \geqslant 2$. *При этом имеет место априорная оценка*

$$\| u \|_s^R \leqslant C \{ \| Lu \|_{s-1} + \| Bu \|_{s-\frac{1}{2}} + \| u \|_{(0)} \}, \quad \forall s \geqslant 2,$$

$$\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega}),$$

В заключение отметим, что $\mathscr{H}^{(s)}(\Omega) \supset \mathscr{H}_R^{(s)} \supset \mathscr{H}^{(s+1)}(\Omega)$, так что решение получается в промежуточном пространстве между $\mathscr{H}^{(s)}(\Omega)$ и $\mathscr{H}^{(s+1)}(\Omega)$ при тех же условиях гладкости исходных данных, которые нужны для разрешимости эллиптической задачи в $\mathscr{H}^{(s+1)}(\Omega)$.

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.— М.: Наука, 1966.— 203 с.
2. *Вайнберг Б. Р., Грушин В. В.* О равномерно неэллиптических задачах. Ч. 2. Равномерно некоэрцетивные краевые задачи для эллиптических уравнений и систем.— Мат. сб., 1967, **73**, № 1, с. 126—154.
3. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М. : Мир, 1965.— 380 с.
4. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.— Мат. сб., 1965, **68**, № 3, с. 373—415.
5. *Хоанг Куок Тоан.* Некоторые неэллиптические граничные задачи для системы уравнений Бицадзе.— Дифференц. уравнения, 1979, **15**, № 12, с. 2282—2285.

Вьетнам Поступила 26.10.83