УДК 517.535.4

М. Л. Содин

Асимптотический модуль непрерывности субгармонических функций конечного порядка

1. Пусть $\rho(r)\to\rho$, $0<\rho<\infty$, — уточненный порядок, $SH(\rho(r))$ — класс субгармонических в плоскости функций u не выше чем нормального типа σ_u относительно $\rho(r)$, $M^+(\rho(r))$ — класс неотрицательных локально конечных в плоскости мер μ не выше чем нормального типа σ_μ относительно $\rho(r)$. Для функции $u\in SH(\rho(r))$ положим

$$\widetilde{\Delta}_h u(z)=r^{-\rho(r)}[u(z+hz)-u(z)],\quad h\in\mathbf{C},\quad z=re^{i\theta}.$$

Оценка этой величины вне исключительных множеств производилась многими авторами; отметим здесь [1, гл. II; 2].

Записывая $\sup^{(A)}|\widetilde{\Delta}_h u(z)|$, мы предполагаем, что supremum берется по таким z, что ни z, ни $z+hz$ не попадают в исключительное множество A; через M_ρ обозначаем различные постоянные, зависящие лишь от числа ρ.

В работе [2, ч. 1] показано, что для каждого числа $\eta>0$ найдется такое множество A, верхняя линейная плотность которого не превышает η, что

$$\sup^{(A)}|\widetilde{\Delta}_h u(z)|\leqslant M_\rho\sigma_u\int_0 \ln\left(1+\frac{|h|}{\eta t}\right)dt.$$

Следуя [1], множества нулевой линейной плотности будем называть C^0-множествами.

По аналогии с определением нижнего индикатора, данным А. А. Гольдбергом, введем асимптотический модуль непрерывности функции $u\in SH(\rho(r))$ $\omega(\delta,u)=\inf\limits_{C^0}\sup\limits_{|h|\leqslant\delta}{}^{(C^0)}|\widetilde{\Delta}_h u(z)|$. Вообще говоря, эта величина не обязана быть даже конечной. Далее нас будет интересовать при каких условиях на риссовскую меру μ_u субгармонической функции u выполняется условие

$$\omega(\delta, u) \to 0, \qquad \delta \to 0, \tag{1}$$

или, что то же самое, $\tilde{\Delta}_h u(z) \rightrightarrows 0$, $h \to 0$, $z, z + hz \notin C^0$ равномерно по z.

Пусть $C(a, s) = \{\zeta : |a - \zeta| < s\}$. Для меры $\mu \in M^+(\rho(r))$ положим

$$\mu_z(t) = r^{-\rho(r)} \mu(C(z, tr)),$$

$$\Psi(\delta, \mu) = \lim_{\eta \to 0} \overline{\lim_{z \to \infty}} \int_\eta^\delta \frac{\mu_z(t)}{t}\, dt,$$

$$\Psi_1(\delta, \mu) = \overline{\lim_{z \to \infty}}\, \delta \int_\delta^1 \frac{\mu_z(t)}{t^2}\, dt.$$

Далее основную роль будет играть функция $\Psi(\delta, \mu)$, отметим, что величина $\Psi(1, \mu)$ рассматривалась ранее в [3].

Основным результатом работы является следующая оценка (см. теорему 2), верная для произвольной функции $u \in SH(\rho(r))$:

$$\Psi(\delta, \mu_u) \leqslant \omega(\delta, u) \leqslant M_\rho (\Psi(\delta, \mu_u) + \Psi_1(\delta, \mu_u) + \sigma_u \delta). \tag{2}$$

Заметим, что коль скоро $\sigma_u \leqslant M_\rho \sigma_\mu$, в частности, если ρ — нецелое число, то в силу оценки $\Psi_1(\delta) \geqslant \overline{\lim_{z \to \infty}}\, \delta \int_{1/2}^1 \frac{\mu_z(t)}{t^2}\, dt \geqslant M_\rho \sigma_\mu \delta \geqslant M_\rho \sigma_u \delta$ последнее слагаемое в правой части (2) можно опустить.

Из (2) и оценки

$$\Psi_1(\delta) \leqslant \overline{\lim_{z \to \infty}}\, \delta \int_\delta^{\delta^{1/2}} \frac{\mu_z(t)}{t^2}\, dt + \overline{\lim_{z \to \infty}}\, \delta \int_{\delta^{1/2}}^1 \frac{\mu_z(t)}{t^2}\, dt \leqslant \Psi(\delta^{1/2}) + \sigma_\mu M_\rho \delta^{1/2}$$

сразу же следует эквивалентность условия

$$\Psi(\delta, \mu_u) \to 0, \qquad \delta \to 0, \tag{3}$$

и условия (1).

В работе [2] введена функция плотности меры μ $\Phi(t, \mu) = \overline{\lim_{z \to \infty}}\, \mu_z(t)$. Из результатов [2] следует теорема.

Теорема Г. *Пусть* $u \in SH(\rho(r))$, $\Phi(t) = \Phi(t, \mu_u)$. *Тогда первое из условий*

$$\int_0 \frac{\Phi(t)}{t}\, dt < \infty, \qquad \lim_{t \to 0} \Phi(t) \ln \frac{1}{t} = 0 \tag{4}$$

является достаточным, а второе — необходимым для выполнения (1).

В силу неравенств

$$\Psi(\delta) \leqslant \int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t}\, dt, \qquad \Psi(\delta^{1/2}) \geqslant \overline{\lim_{z \to \infty}} \int_\delta^{\delta^{1/2}} \frac{\mu_z(t)}{t}\, dt \geqslant \frac{1}{2} \Phi(\delta) \ln \frac{1}{\delta},$$

первое из условий (4) достаточно, а второе — необходимо для выполнения (3). Таким образом, теорема Гришина следует из оценки (2). Отметим, что в [2] показано, что при использовании функции плотности $\Phi(t)$ условия (4) неулучшаемы.

К рассматриваемым вопросам примыкает также следующая теорема Б. Я. Левина.

Теорема Л. *Пусть множество A таково, что при* $z \notin A$ $\int\limits_0^\delta \frac{\mu_z(t)}{t}\,dt \rightrightarrows 0,\ \delta \to 0,$ *равномерно по z. Тогда* $\sup^{(A)} |\widetilde{\Delta}_h u(z)| \rightrightarrows 0,\ h \to 0,$ *также равномерно по z.*

2. Далее мы будем использовать теорию предельных множеств субгармонических функций конечного порядка, построенную в [4]. Напомним необходимые определения и результаты этой теории, отсылая за всеми подробностями к [4].

Пусть $u \in SH(\rho(r))$. Тогда семейство функций $u_s(z) = s^{-\rho(s)} u(sz)$, $s \geqslant 1$, предкомпактно в топологии пространства обобщенных функций Л. Шварца $D'(\mathbf{R}^2)$ в следующем смысле. Для любой последовательности $s_n \to \infty$ найдутся такая ее подпоследовательность s_n' и такая субгармоническая функция $v(z)$, что $u_{s_n'} \to v$ в топологии D'. Множество всех предельных функций для функции u, отвечающих всевозможным последовательностям s_n, называется предельным множеством и обозначается $Fr[u]$. Субгармонические функции из $Fr[u]$ удовлетворяют условию $v(z) \leqslant \sigma_u |z|^\rho$ $z \in \mathbf{C}$, а само предельное множество инвариантно относительно преобразования $v_\tau(z) = \tau^{-\rho} v(\tau z)$, $0 < \tau < \infty$.

Далее мы будем рассматривать исключительные множества A, состоящие из кружков $C_j = C(z_j, a_j)$. Верхней α-плотностью множества A $(0 < \alpha \leqslant 2)$ называется величина $\rho_\alpha^*(A) = \overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \frac{1}{R^\alpha} \sum\limits_{|z_j|<R} a_j^\alpha$.

Множество A называется C_0^α-множеством, если $\rho_\alpha^*(A) = 0$, и C_0^0-множеством, если $\rho_\alpha^*(A) = 0$ при всех $\alpha > 0$.

Применим теперь в нашей ситуации один эвристический принцип теории В. С. Азарина. Если некоторое условие (оценка) выполняется для функции $u \in SH(\rho(r))$ вне C_0^2-множества, то аналогичная оценка выполняется всюду и равностепенно для функций из $Fr[u]$, а следовательно, исходная оценка выполняется для u вне C_0^0 множества (ср. [4, § 4]).

Положим

$$\omega_0(\delta, u) = \inf_{C_0^0} \sup_{|h|\leqslant\delta}{}^{(C_0^0)} |\widetilde{\Delta}_h u(z)|, \qquad \omega_2(\delta, u) = \inf_{C_0^2} \sup_{|h|\leqslant\delta}{}^{(C_0^2)} |\widetilde{\Delta}_h u(z)|,$$

$$\omega(\delta, Fr[u]) = \sup_{v\in Fr[u]} \sup_{z\in\mathbf{C}} \sup_{|h|\leqslant\delta} |v(z+hz) - v(z)|\,|z|^{-\rho}.$$

Теорема 1. *Пусть* $u \in SH(\rho(r))$. *Тогда* $\omega_0(\delta, u) = \omega_2(\delta, u) = \omega(\delta, Fr[u])$.

Доказательство этой теоремы представляет собой обоснование сформулированного выше эвристического принципа в нашей ситуации, и мы его опускаем.

3. Для меры $\mu \in M^+(\rho(r))$ рассмотрим семейство мер μ_s, $s \geqslant 1 : \mu_s(E) = s^{-\rho(s)} \mu(sE)$ для произвольного борелевского множества E. Это семейство предкомпактно в слабой топологии пространства мер в плоскости в таком же смысле, что и семейство u_s, $u \in SH(\rho(r))$. Предельное множество $Fr[\mu]$ меры μ инвариантно относительно преобразования $\nu_\tau(E) = \tau^{-\rho}\nu(\tau E)$, и меры из $Fr[\mu]$ удовлетворяют условию $\nu(C(0, r)) \leqslant \sigma_\mu r^\rho$, $0 < r < \infty$. Кроме того, $Fr[\mu_u] = \{\nu : \nu = \nu_v,\ v \in Fr[u]\}$.

Введенные ранее для меры $\mu \in M^+(\rho(r))$ функции $\Psi(\delta)$, $\Psi_1(\delta)$ нетрудно выразить через $Fr[\mu]$.

Лемма. *Пусть* $\mu \in M^+(\rho(r))$. *Тогда*

$$\Psi(\delta) = \sup_{\nu\in Fr[\mu]} \sup_{z\in\mathbf{C}} \int\limits_0^\delta \frac{\nu_z(t)}{t}\,dt, \quad \nu_z(t) = |z|^{-\rho}\,\nu(C(z, t|z|)),$$

$$\Psi_1(\delta) = \sup_{\nu\in Fr[\mu]} \sup_{z\in C} \delta \int_\delta^1 \frac{\nu_z(t)}{t^2}\, dt.$$

Доказательство этой леммы мы также опускаем.

Теорема 2. *Если* $u \in SH(\rho(r))$, *то* $\Psi(\delta, \mu_u) \leqslant \omega(\delta, u) \leqslant M_\rho(\Psi(\delta, \mu_u) + \Psi_1(\delta, \mu_u) + \sigma_u\delta)$.

Доказательство. После теоремы 1 и леммы оценка снизу тривиальна. Действительно, пусть $v \in Fr[u]$, $\nu = \nu_v$. Тогда, коль скоро $v(e^{i\theta}) \neq -\infty$,

$$\int_0^\delta \frac{\nu_{e^{i\theta}}(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(e^{i\theta} + \delta e^{i\varphi}) - v(e^{i\theta})]\, d\varphi,$$

$$\Psi(\delta) = \sup_{\nu,\theta} \int_0^\delta \frac{\nu_{e^{i\theta}}(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{v,\theta} |v(e^{i\theta} + \delta e^{i\varphi}) - v(e^{i\theta})|\, d\varphi \leqslant \omega(\delta).$$

Если $v(e^{i\theta}) = -\infty$, то $\Psi(\delta) = \omega(\delta) = +\infty$ при всех $\delta > 0$.

Теперь мы докажем оценку сверху для величины $\omega(\delta/10)$ и воспользуемся неравенством $\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta)$, $n \in \mathbf{N}$. Отметим, что рассуждения, которыми мы будем пользоваться, аналогичны тем, с помощью которых доказывается теорема Б. Я. Левина, сформулированная во введении.

Применим дважды формулу Иенсена к произвольной функции $v \in Fr[u]$:

$$v(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta} + \delta e^{i\varphi})\, d\varphi - \int_0^\delta \frac{\nu_{e^{i\theta}}(t)}{t}\, dt, \tag{5}$$

$$v(e^{i\theta} + h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta} + h + \delta e^{i\varphi})\, d\varphi - |e^{i\theta} + h|^\rho \int_0^\delta \frac{\nu_{e^{i\theta}+h}(t)}{t}\, dt, \tag{6}$$

где $|h| \leqslant \delta/10$. Из этих формул видно, что нам достаточно оценить сверху модуль величины $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v(e^{i\theta} + h + \delta e^{i\varphi}) - v(e^{i\theta} + \delta e^{i\varphi})]\, d\varphi$.

Положим $\tilde v(\zeta) = v(e^{i\theta} + \zeta)$, $\tilde\nu$ — риссовская мера функции $\tilde v$, $\tilde\nu(C(0, t)) = \nu(C(e^{i\theta}, t))$. (Число $\theta \in [0, 2\pi]$ пока фиксировано). Запишем формулу Пуассона-Иенсена для функции $\tilde v$ в круге $C(0, 1)$, полагая $t \leqslant 1/2$.

$$\tilde v(te^{is}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde v(e^{i\psi}) \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\psi - s) + t^2}\, d\psi - \iint_{C(0,1)} \ln|1 -$$

$$- te^{is}\bar\zeta|\, d\tilde\nu(\zeta) + \iint_{C(0,1)} \ln|te^{is} - \zeta|\, d\tilde\nu(\zeta) = v_1 + v_2 + v_3. \tag{7}$$

Оценки

$$|v_i(z + h) - v_i(z)| \leqslant M_\rho\sigma_u|h|, \quad i = 1, 2, \quad |h| \leqslant 1/4 \tag{8}$$

очевидны. Поэтому нам осталось оценить величину

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [v_3(\delta e^{i\varphi} + h) - v_3(\delta e^{i\varphi})]\, d\varphi\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{C(0,1)} [\ln|\delta e^{i\varphi} + h - \zeta| -\right.$$

$$\left.- \ln|\delta e^{i\varphi} - \zeta|]\, d\tilde\nu(\zeta)\right| = \left|\iint_{C(0,1)} \left[\ln^+ \frac{|h - \zeta|}{\delta} - \ln^+ \frac{|\zeta|}{\delta}\right] d\tilde\nu(\zeta)\right|. \tag{9}$$

$\left(\text{Мы воспользовались известным равенством } \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|a - e^{i\varphi}|\, d\varphi = \ln^+|a|\right)$.

Разобьем область интегрирования на три части, положив $C_1 = C(0,1) \setminus C(0,\delta) \setminus C(h,\delta)$, $C_2 = C(0,\delta) \setminus C(h,\delta)$, $C_3 = C(h,\delta) \setminus C(0,\delta)$. Оценим интеграл по лунке C_2. Если $\zeta \in C_2$, то $\ln^+ \dfrac{|h-\zeta|}{\delta} \leqslant \ln 11/10 < 1/10$, а следовательно,

$$\iint\limits_{C_2} \ln^+ \frac{|h-\zeta|}{\delta}\, d\tilde{\nu}(\zeta) \leqslant \frac{1}{10}\, \tilde{\nu}(C(0,\delta)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{10}\int\limits_{\delta}^{e\delta} \frac{\tilde{\nu}(C(0,t))}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{10}\,\Psi(e\delta). \tag{10}$$

Аналогично оценивается интеграл по лунке C_3. Если $\zeta \in C_1$, то $|\zeta| \geqslant \delta$, следовательно, $\left|1 - \dfrac{h}{\zeta}\right| \geqslant \dfrac{9}{10}$. В силу оценки $|\ln|1+\lambda|| \leqslant |\lambda| \max(1, |1+\lambda|^{-1})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, получаем $\left|\ln\left|1 - \dfrac{h}{\zeta}\right|\right| \leqslant \dfrac{|h|}{|\zeta|} \max\left(1, \left|1 - \dfrac{h}{\zeta}\right|^{-1}\right) \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{9}\, \dfrac{\delta}{|\zeta|}$.

Таким образом,

$$\left|\iint\limits_{C_1} \ln\left|1 - \frac{h}{\zeta}\right| d\tilde{\nu}(\zeta)\right| \leqslant \frac{\delta}{9} \iint\limits_{C_1} \frac{d\tilde{\nu}(\zeta)}{|\zeta|} \leqslant M\Psi_1(\delta). \tag{11}$$

Объединяя (5)—(11), получаем нужную оценку сверху для $\omega(\delta/10)$. Теорема 2 доказана.

4. Сделаем несколько дополнений к рассмотренным вопросам.

(*i*) Теоремы 1 и 2 непосредственно переносятся на субгармонические в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, функции. При этом величина $\Psi(\delta, \mu)$ определяется следующим образом: $\Psi(\delta, \mu) = \lim\limits_{\eta \to 0} \overline{\lim\limits_{x \to \infty}} \int\limits_{\eta}^{\delta} \dfrac{\mu_x(t)}{t^{n-1}}\, dt$; аналогично определяется и $\Psi_1(\delta, \mu)$.

Отметим, что в пространственном случае в отличие от плоского правильно распределенные массы могут не удовлетворять условию (3), а следовательно, субгармонические функции вполне регулярного роста не обязаны удовлетворять условию (1).

(*ii*) Пусть U^μ — логарифмический потенциал конечной положительной меры μ в плоскости. Положим $\omega(\delta, U^\mu) = \sup\limits_{|h| \leqslant \delta} |U^\mu(z + hz) - U^\mu(z)|$, $\Psi(\delta, \mu) = \sup\limits_{z \in \mathbf{C}} \int\limits_0^{\delta} \dfrac{\mu(C(z, tr))}{t}\, dt$, аналогично вводим и $\Psi_1(\delta, \mu)$. Тогда $\Psi(\delta, \mu) \leqslant \omega(\delta, U^\mu) \leqslant M(\Psi(\delta, \mu) + \Psi_1(\delta, \mu))$. Аналогичная оценка выполняется в случае ньютонова потенциала в пространстве.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 632 с.
2. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1968, вып. 6, с. 3—29; вып. 8, с. 126—135.
3. *Красичков И. Ф.* Оценки снизу для целых функций.— Сиб. мат. журн., 1965, **6**, № 4, с. 840—861.
4. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций.— Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167.

Харьк. ун-т Поступила 18.10.82