УДК 517.956

В. А. Маловичко

К теории краевых задач для систем составного типа третьего порядка

В настоящей работе изучается разрешимость задачи Гурса для двух систем дифференциальных уравнений третьего порядка составного типа [1].

Пусть K_1, K_2 — два конуса в R^{n+1}, определяемые соотношениями

$$K_1 = \{(x, t) \in R^{n+1} : t - t^* = -|x - x^*| \, g_1((x - x^*)/|x - x^*|)\},$$

$$K_2 = \{(x, t) \in R^{n+1} : t - t^{**} = |x - x^{**}| \, g_2((x - x^{**})/|x - x^{**}|)\},$$

где $t \in R^1$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $g_1(x)$, $g_2(x)$ — вполне определенные положительные гладкие функции, заданные на единичной сфере в R^n, причем предполагается, что вершина (x^*, t^*) конуса K_1 находится внутри конуса K_2, а вершина (x^{**}, t^{**}) конуса K_2 находится внутри конуса K_1. Введем следующие обозначения:

$$\Omega = \{(x, t) \in R^{n+1} : t^{**} + |x - x^{**}| \, g_2((x - x^{**})/|x - x^{**}|) < t < t^* - \\ - |x - x^*| \, g_1((x - x^*)/|x - x^*|)\},$$

Γ — граница области Ω, $l(x, t) = (l_1(x, t), \ldots, l_{n+1}(x, t))$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $(x, t) \in \Gamma$; $U(x, t)$, $V(x, t)$, $F(x, t)$ — N-мерные вектор-функции, $C_0^k(\bar{\Omega})$ — множество вектор-функций из $C^k(\bar{\Omega})$, равных нулю на Γ, $W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ по норме $\|\cdot\|_1$ пространства $W_2^1(\Omega)$, $\|\cdot\|$ — норма пространства $L_2(\Omega)$.

1. Рассмотрим в области Ω систему

$$L_1 U(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} M_1 U(x, t) + \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}(x, t) U_{x_i x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^{n} B^i(x, t) U_{x_i}(x, t) + \\ + B(x, t) U(x, t) = F(x, t), \tag{1}$$

где

$$M_1 U(x, t) \equiv A(x, t) U_{tt}(x, t) - \sum_{i,j=1}^{n} [A^{ij}(x, t) U_{x_i}(x, t)]_{x_j},$$

A, A^{ij}, B^{ij}, B^i, B — симметричные матрицы размерности $N \times N$, причем предполагается, что для всех точек $(x, t) \in \Omega$ и любых векторов Z, $Z_i \in R^N$, $i = 0, \ldots, n$, выполняются следующие соотношения:

$$A^{ij}(x, t) = A^{ji}(x, t), \quad B^{ij}(x, t) = B^{ji}(x, t), \quad A(x, t) ZZ \geqslant \alpha_1 |Z|^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}(x, t) Z_i Z_j \geqslant \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} |Z_i|^2, \quad \left[- \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}_{x_i x_j}(x, t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} B^i_{x_i}(x, t) - 2B(x, t) \right] ZZ \geqslant \alpha_3 |Z|^2, \qquad \alpha_{1,2,3} = \mathrm{const} > 0,$$

а для всех точек $(x, t) \in \Gamma$, в которых определен вектор $l(x, t)$, выполняется соотношение

$$A(x, t) l_{n+1}^2(x, t) - \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x, t) l_i(x, t) l_j(x, t) = 0, \tag{2}$$

которое означает, что конусы K_1, K_2 являются характеристическими для оператора M_1.

Относительно гладкости коэффициентов системы (1) предполагаем, что $A,\ A^{ij},\ B^{ij}\in C^2(\overline{\Omega}),\ B^i\in C^1(\overline{\Omega}),\ B\in C(\overline{\Omega})$.

Задача 1. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевому условию

$$U(x,\ t)=0, \qquad (x,\ t)\in\Gamma. \tag{3}$$

Обозначим через L_1^* оператор, формально сопряженный с оператором L_1.

Задача 1*. В области Ω найти решение системы

$$L_1^*V(x,\ t)=F(x,\ t), \tag{4}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$V(x,\ t)=0, \qquad (x,\ t)\in\Gamma. \tag{5}$$

Лемма 1. *Задачи* 1 *и* 1* *взаимно сопряженные.*

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $(L_1U)V$, где $U(x,\ t),\ V(x,\ t)\in C_0^3(\overline{\Omega})$, приходим к тождеству

$$\int\limits_\Omega (L_1U)\,Vd\Omega=-\int\limits_\Gamma\left(AU_tl_{n+1}-\sum_{i,j=1}^n A^{ij}U_{x_i}l_j\right)V_td\Gamma+\int\limits_\Omega UL_1^*Vd\Omega. \tag{6}$$

Поскольку дифференциальный оператор $l_{n+1}\,\partial/\partial x_i-l_i\,\partial/\partial t,\ i=1,\ldots,n$, является внутренним дифференциальным оператором на границе Γ, то в силу условия (3) на Γ

$$l_{n+1}U_{x_i}-l_iU_t=0. \tag{7}$$

Умножая (7) на $A^{ij}l_j$ и суммируя по $i,\ j$ от 1 до n, получаем на Γ

$$l_{n+1}\sum_{i,j=1}^n A^{ij}U_{x_i}l_j-\sum_{i,j=1}^n A^{ij}l_il_jU_t=0. \tag{8}$$

Из (2), (8) следует равенство $AU_tl_{n+1}-\sum\limits_{i,j=1}^n A^{ij}U_{x_i}l_j=0$ на Γ. Следовательно, интеграл по Γ в (6) равен нулю и лемма доказана.

Определение 1. *Пусть* $F(x,\ t)\in L_2(\Omega)$. *Вектор-функцию* $U(x,\ t)\in L_2(\Omega)$ *будем называть обобщенным решением задачи* 1, *если имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega FVd\Omega=\int\limits_\Omega U\,(L_1^*V)\,d\Omega, \quad V(x,\ t)\in C_0^3(\overline{\Omega}). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* $F(x,\ t)\in L_2(\Omega)$ *и для любых векторов* $Z,\ Z_i\in R^N$, $i=1,\ldots,n$, *в области* Ω *выполняются условия*

$$A_t(x,\ t)\,ZZ\leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^n A_t^{ij}(x,\ t)\,Z_iZ_j\leqslant 0. \tag{10}$$

Тогда существует обобщенное решение $U(x,\ t)$ *задачи* 1, *принадлежащее пространству* $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Для вектор-функций $U(x,\ t),\ V(x,\ t)\in C_0^2(\overline{\Omega})$ введем билинейную форму

$$B_\tau(U,\ V)=\int\limits_\Omega\Bigg\{AU_t(\omega_\tau V)_{tt}+A_tU_t(\omega_\tau V)_t-\sum_{i,j=1}^n A^{ij}U_{x_i}(\omega_\tau V_{x_j})_t-$$
$$-\omega_\tau\Bigg[\sum_{i,j=1}^n B^{ij}U_{x_i}V_{x_j}-\sum_{i,j=1}^n B^{ij}_{x_i}UV_{x_j}+\sum_{i=1}^n B^iUV_{x_i}-$$
$$-\left(\sum_{i,j=1}^n B^{ij}_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^n B^i_{x_i}+B\right)UV\Bigg]\Bigg\}\,d\Omega, \tag{11}$$

где $\omega_\tau(t) = t - \tau$, τ — положительное число. Поскольку

$$|B_\tau(U, V)| \leqslant \alpha_\tau \left[\int_\Omega \left(V_{tt}V_{tt} + \sum_{i=1}^n V_{x_it}V_{x_it} + V_tV_t + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^n V_{x_i}V_{x_i} + VV \right) d\Omega \right]^{1/2} \cdot \| U \|_1,$$

где α_τ — некоторая положительная постоянная, зависящая лишь от τ и коэффициентов оператора L_1, то при фиксированной вектор-функции $V(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega})$ билинейную форму $B_\tau(U, V)$ можно рассматривать как линейный ограниченный функционал относительно $U(x, t)$, определенный в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому согласно теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве $B_\tau(U, V) = \langle U, T_\tau V \rangle$, где T_τ — линейный оператор, определенный на $C_0^2(\overline{\Omega})$, область значений которого лежит в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\langle U, V \rangle$ — скалярное произведение, соответствующее норме $\|\cdot\|_1$.

Для $U(x, t)$, $V(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega})$ можно переписать (11) в виде

$$B = (U, V) \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ (3A + \omega_\tau A_t) U_t V_t + \omega_\tau A (U_t V_{tt} - U_{tt} V_t) + A_t (U_t V - U V_t) + \right.$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n (\omega_\tau A_t^{ij} - A^{ij}) U_{x_i} V_{x_j} - \omega_\tau \sum_{i,j=1}^n A^{ij} (U_{x_i} V_{x_j t} - U_{x_i t} V_{x_j}) -$$
$$- 2\omega_\tau \sum_{i,j=1}^n B^{ij} U_{x_i} V_{x_j} + \omega_\tau \sum_{i,j=1}^n B_{x_i}^{ij} (U V_{x_j} - U_{x_j} V) - \omega_\tau \sum_{i=1}^n B^i (U V_{x_i} - U_{x_i} V) +$$
$$\left. + \left[\omega_\tau \left(\sum_{i,j=1}^n B_{x_i x_j}^{ij} - \sum_{i=1}^n B_{x_i}^i + 2B \right) - A_{tt} \right] UV \right\} d\Omega +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_\Gamma \omega_\tau \left[A U_t V_t - \sum_{i,j=1}^n A^{ij} U_{x_i} V_{x_j} \right] l_{n+1} d\Gamma. \tag{12}$$

Обозначим $U_l \equiv \partial U/\partial l$. Так как вектор-функции $U(x, t)$, $V(x, t)$ на границе равны нулю, то на Γ

$$U_{x_i} = U_l l_i, \quad U_t = U_l l_{n+1}, \quad V_{x_i} = V_l l_i, \quad V_t = V_l l_{n+1}. \tag{13}$$

Из (2), (13) имеем

$$A U_t V_t - \sum_{i,j=1}^n A^{ij} U_{x_i} V_{x_j} = \left(A l_{n+1}^2 - \sum_{i,j=1}^n A^{ij} l_i l_j \right) U_l V_l = 0 \tag{14}$$

на Γ и, следовательно, интеграл по Γ в (12) равен нулю. Учитывая условия (10) и выбирая число τ достаточно большим, получим неравенство $|B_\tau(V, V)| \geqslant \beta_\tau \| V \|_1^2$, $\beta_\tau = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, $\beta_\tau \| V \|_1^2 \leqslant |B_\tau(V, V)| = |\langle V, T_\tau V \rangle| \leqslant \| V \|_1 \| T_\tau V \|_1$. Таким образом, получена оценка $\beta_\tau \| V \|_1 \leqslant \| T_\tau V \|_1$, которая показывает, что отображение $T_\tau : C_0^2(\overline{\Omega}) \to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ взаимно однозначно. Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ замыкание множества $T_\tau V$, где $V(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega})$, в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поскольку

$$\left| \int_\Omega \omega_\tau F V d\Omega \right| \leqslant \gamma_\tau \| V \| \| F \| \leqslant \gamma_\tau \| V \|_1 \| F \| \leqslant \frac{\gamma_\tau}{\beta_\tau} \| T_\tau V \|_1 \| F \|,$$
$$\gamma_\tau = \mathrm{const} > 0,$$

то интеграл $\int\limits_{\Omega}\omega_\tau FV d\Omega$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал над $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Поэтому по теореме Рисса существует такая вектор-функция $\widetilde{U}(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, что

$$\int\limits_{\Omega}\omega_\tau FV d\Omega = \langle \widetilde{U}, T_\tau V\rangle = B_\tau(\widetilde{U}, V), \quad V(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega}). \tag{15}$$

Последнее означает, что существует последовательность вектор-функций $U_k(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega})$, сходящаяся к $\widetilde{U}(x, t)$ по норме $\|\cdot\|_1$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} B_\tau(U_k, V) = B_\tau(\widetilde{U}, V). \tag{16}$$

Для любой вектор-функции $V(x, t) \in C_0^3(\overline{\Omega})$ форму $B_\tau(U_k, V)$ интегрированием по частям можно преобразовать так, что

$$B_\tau(U_k, V) = \int\limits_{\Omega} U_k L_1^* V_1 d\Omega, \tag{17}$$

где $V_1(x, t) = \omega_\tau(t) V(x, t)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} U_k L_1^* V_1 d\Omega = \int\limits_{\Omega}\widetilde{U} L_1^* V_1 d\Omega, \tag{18}$$

то из (15) — (18) имеем равенство

$$\int\limits_{\Omega} F V_1 d\Omega = \int\limits_{\Omega}\widetilde{U} L_1^* V_1 d\Omega. \tag{19}$$

Поскольку при фиксированном τ отображение $V(x, t) \to \omega_\tau(t) V(x, t)$ множества $C_0^3(\overline{\Omega})$ на само себя взаимно однозначно, то равенство (19) выполняется для любой вектор-функции $V_1(x, t) \in C_0^3(\overline{\Omega})$. Следовательно, вектор-функция $\widetilde{U}(x, t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если для некоторой вектор-функции $F(x, t) \in L_2(\Omega)$ существует регулярное решение задачи* 1, *то оно единственно и непрерывно зависит от $F(x, t)$.*

Утверждение теоремы 2 следует из энергетического неравенства $\|L_1 U\| \geqslant \alpha_4 \|U\|$, $U(x, t) \in C_0^3(\overline{\Omega})$, $\alpha_4 = \text{const} > 0$, которое доказывается интегрированием по частям выражения $\omega_\tau(L_1 U) U$ (число τ выбирается достаточно большим).

2. Рассмотрим в области Ω систему

$$L_2 U(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i} M_2 U(x, t) + \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}(x, t) U_{x_i x_j}(x, t) + $$
$$+ \sum_{i=1}^{n} B^i(x, t) U_{x_i}(x, t) + B(x, t) U(x, t) = F(x, t), \tag{20}$$

где $M_2 U(x, t) \equiv K(x) U_{tt}(x, t) - \sum\limits_{j=1}^{n} K^j(t) U_{x_j x_j}(x, t)$, B^{ij}, B^i, B — такие же матрицы, как и в системе (1), $K(x)$, $K^j(t)$ — симметричные матрицы размерности $N \times N$, удовлетворяющие в области Ω соотношениям

$$K(x) ZZ \geqslant \alpha_5 |Z|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(x) ZZ \geqslant 0, \quad K^j(t) ZZ \geqslant \alpha_6 |Z|^2,$$
$$Z \in R^N, \quad \alpha_{5,6} = \text{const} > 0.$$

Предполагается также, что K, $K^j \in C^2(\overline{\Omega})$.

Будем считать, что конусы K_1, K_2 являются характеристическими для оператора M_2, т. е. во всех точках $(x, t) \in \Gamma$, в которых определен вектор $l(x, t)$, $K(x) l_{n+1}^2(x, t) - \sum_{j=1}^{n} K^j(t) l_j^2(x, t) = 0$.

Задача 2. В области Ω найти решение системы (20), удовлетворяющее краевому условию

$$U(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma. \tag{21}$$

Отметим, что подобная краевая задача для одного уравнения ($N=1$) рассматривалась в [2].

Задача 2*. В области Ω найти решение системы

$$L_2^* V(x, t) = F(x, t), \tag{22}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$V(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma, \tag{23}$$

где L_2^*— оператор, формально сопряженный с оператором L_2.

Лемма 2. *Задачи 2 и 2* взаимно сопряженные.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Определение 2. *Пусть $F(x, t) \in L_2(\Omega)$. Вектор-функцию $U(x, t) \in L_2(\Omega)$ будем называть обобщенным решением задачи 2, если имеет место равенство*

$$\int_\Omega FV d\Omega = \int_\Omega U(L_2^* V) d\Omega, \quad V(x, t) \in C_0^3(\overline{\Omega}). \tag{24}$$

Теорема 3. *Для любой вектор-функции $F(x, t) \in L_2(\Omega)$ существует обобщенное решение задачи 2 из пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Для вектор-функций $U(x, t)$, $V(x, t) \in C_0^2(\overline{\Omega})$ введем билинейную форму

$$\tilde{B}_\lambda(U, V) = \int_\Omega \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} \Bigg[KU_t (\tilde{\omega}_\lambda V_t)_{x_i} - \sum_{j=1}^{n} K^j U_{x_j} (\tilde{\omega}_\lambda U)_{x_i x_j} \Bigg] -$$

$$- \tilde{\omega}_\lambda \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij} U_{x_i} V_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{\omega}_\lambda B^{ij})_{x_i} UV_{x_j} - \tilde{\omega}_\lambda \sum_{i=1}^{n} B^i UV_{x_i} +$$

$$+ \Bigg[\tilde{\omega}_\lambda \Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} B^i_{x_i} + B \Bigg) + 2 \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} B^i \Bigg] UV \Bigg\} d\Omega,$$

где $\tilde{\omega}_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i - \lambda$, λ — положительное число. Легко видеть, что

$$|\tilde{B}_\lambda(U, V)| \leqslant \tilde{\alpha}_\lambda \Bigg[\int_\Omega \Bigg(\sum_{i=1}^{n} V_{x_i t} V_{x_i t} + \sum_{i,j=1}^{n} V_{x_i x_j} V_{x_i x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} V_{x_i} V_{x_i} + VV \Bigg) d\Omega \Bigg]^{1/2} \cdot \| U \|_1, \qquad \tilde{\alpha}_\lambda = \text{const} > 0.$$

Форму $\tilde{B}_\lambda(U, V)$ можно записать в виде

$$\tilde{B}_\lambda(U, V) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Bigg\{ \tilde{\omega}_\lambda \sum_{i=1}^{n} (KU_t V_{tx_i} - KU_{tx_i} V_t - K_{x_i} U_t V_t) +$$

$$+ nKU_t V_t + \tilde{\omega}_\lambda \sum_{i,j=1}^{n} (K^j U_{x_i x_j} V_{x_j} - K^j U_{x_j} V_{x_i x_j}) -$$

$$-2\sum_{i,j=1}^{n} K^j U_{x_j} V_{x_i} - n\sum_{j=1}^{n} K^j U_{x_j} V_{x_j} - 2\tilde{\omega}_\lambda \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij} U_{x_i} V_{x_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{\omega}_\lambda B^{ij})_{x_i} (UV_{x_j} - U_{x_j} V) - \tilde{\omega}_\lambda \sum_{i=1}^{n} B^i (UV_{x_i} - U_{x_i} V) +$$

$$+\left[\tilde{\omega}_\lambda \left(\sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} B^i_{x_i} + 2B\right) - 2\sum_{i,j=1}^{n} B^{ij}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} B^i\right] UV \Bigg\} d\Omega +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Gamma \tilde{\omega}_\lambda \left(KU_t V_t - \sum_{j=1}^{n} K^j U_{x_j} V_{x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right) d\Gamma.$$

Аналогично (14) можно показать, что $KU_tV_t - \sum_{j=1}^{n} K^j U_{x_j} V_{x_j} = 0$ на Γ и, следовательно, интеграл по границе в (25) равен нулю. Выбирая число λ достаточно большим, из (25) получим неравенство $|\tilde{B}_\lambda(V, V)| \geqslant \tilde{\beta}_\lambda \|V\|_1^2$, $\tilde{\beta}_\lambda = \text{const} > 0$. Дальнейшее доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 4. *Если для некоторой вектор-функции* $F(x, t) \in L_2(\Omega)$ *существует регулярное решение задачи* 2, *то оно единственно и непрерывно зависит от* $F(x, t)$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

1. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа.— Ташкент : Фан, 1974.— 156 с.
2. *Мередов М.* Об одном многомерном уравнении смешанно-составного типа.— Дифференц. уравнения, 1981, **17**, № 6, с. 1122—1127.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти Поступила 05.03.84