УДК 517.977.56

С. И. Ляшко

Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами

Многие прикладные задачи науки и техники приводят к необходимости решать краевые задачи, описываемые уравнениями псевдопараболического типа [1, 2]

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + M(u) = f, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{1}$$

где $L = L(x)$ и $M = M(x)$ — равномерно эллиптические дифференциальные операторы второго порядка. В работе [1] изучалась задача точечного управления системами типа (1). В данной работе доказываются результаты, которые дают возможность решать задачи как точечного, так и импульсного управления, т. е. управления системами, описываемыми уравнением (1) с правыми частями f, являющимися элементами некоторого негативного гильбертова пространства, в том числе и по временной переменной. Отметим, что задачи импульсного управления для некоторых систем с распределенными параметрами изучались в работах [3, 4].

В цилиндрической области $Q \equiv \{\Omega \times (0 \leqslant t \leqslant T)$ рассмотрим уравнение (1), в котором

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \tag{2}$$

$$M(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{3}$$

Ω — регулярная область в R^n с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Положим, что $A_{ji}(x) = A_{ij}$, $B_{ij}(x) = B_{ji}$, $\{A_{ij}\}_{j,i=1}^{n}$, $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — непрерывно дифференцируемы в замкнутой области Ω.
Дифференциальные выражения (2), (3) будем считать равномерно эллиптическими в $\overline{\Omega}$, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2; \qquad \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\eta_i\eta_j \geqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \tag{4}$$

α, β — некоторые положительные константы.

З а д а ч а 1. Найти функцию $u(t, x)$, удовлетворяющую в Q уравнению (1) и условиям

$$u|_{t=0} = 0; \qquad u|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Задача 2. Найти функцию $v(t, x)$, удовлетворяющую в Q уравнению

$$\mathcal{L}^* v \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - M(u) = g \tag{6}$$

и условиям

$$v|_{t=T} = 0; \qquad v|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Отметим, что задачи 1 и 2 взаимно сопряжены.

Введем следующие обозначения: $L_2(Q)$ — пространство интегрируемых с квадратом на множестве Q функций; $W^+_{\text{гр}}$ ($W^+_{\text{гр}+}$) — пополнение гладких функций, удовлетворяющих условиям (5) (соответственно (7)) по норме

$$\|u\|^2_{W^+_{\text{гр}}} = \int\limits_Q \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + \sum_{i,j=1}^n B_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\right) dQ,$$

где индексы внизу при $u(t, x)$ обозначают дифференцирование по соответствующим переменным; $W^-_{\text{гр}}$, $W^+_{\text{гр}+}$ — негативные пространства [5], полученные пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|u\|_{W^-_{\text{гр}+}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|_{W^+_{\text{гр}+}}}, \quad v \in W^+_{\text{гр}+},$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ обозначает билинейную форму, построенную по пространствам $W^+_{\text{гр}+}$ и $W^-_{\text{гр}+}$. Решение поставленных выше задач 1 и 2 будем понимать в обобщенном смысле.

Определение 1. *Решением задачи* 1 *называется функция* $u(t, x) \in W^+_{\text{гр}}$, *для которой существует последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям* (5), *таких, что*

$$\|u_i - u\|_{W^+_{\text{гр}}} \underset{i\to\infty}{\to} 0, \qquad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W^-_{\text{гр}+}} \underset{i\to\infty}{\to} 0.$$

Определение 2. *Решением задачи* 1 *называется функция* $u(t, x) \in L_2(Q)$, *для которой существует последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям* (5), *таких, что*

$$\|u_i - u\|_{L_2(Q)} \underset{i\to\infty}{\to} 0, \qquad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W^-_{\text{гр}+}} \underset{i\to\infty}{\to} 0.$$

Покажем сначала, что оператор $\mathcal{L}$ действует непрерывно из всего пространства $W^+_{\text{гр}}$ в пространство $W^-_{\text{гр}+}$.

Лемма 1. *Для функций* $u(t, x) \in W^+_{\text{гр}}$ *справедливо соотношение*

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{\text{гр}+}} \leqslant C\|u\|_{W^+_{\text{гр}}}. \tag{8}$$

C здесь и дальше обозначает положительную постоянную.

Докажем лемму для гладких функций $u(t, x)$, удовлетворяющих граничным условиям (5). Затем, расширяя соответствующим образом оператор L и применяя предельный переход, получим справедливость приведенного утверждения.

По определению негативной нормы

$$\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{\text{гр}+}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle v, \mathcal{L}u\rangle|}{\|v\|_{W^+_{\text{гр}+}}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(v, \mathcal{L}u)|}{\|v\|_{W^+_{\text{гр}+}}}, \quad v \in W^+_{\text{гр}+}, \tag{9}$$

так как для гладких функций $u(t, x)$ билинейная форма совпадает со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в $L_2(Q)$. Исследуем числитель в правой части (9). Используя операцию интегрирования по частям и неравенство Гельдера, а также учитывая граничные условия

$$\left|\int_Q vu_t dQ\right| \leqslant \left(\int_Q v^2 dQ\right)^{1/2}\left(\int_Q u_t^2 dQ\right)^{1/2} \leqslant \|v\|_{W_{\text{гр}+}^+}\|u\|_{W_{\text{гр}}^+};$$

$$\left|\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t} dQ\right| = \left|\int_Q \sum_{i,j=1}^n v_{x_i}A_{ij}u_{x_jt} dQ\right| \leqslant \|v\|_{W_{\text{гр}+}^+}\|u\|_{W_{\text{гр}}^+}.$$

Аналогично,

$$\left|\int_Q v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} dQ\right| \leqslant \|v\|_{W_{\text{гр}+}^+}\|u\|_{W_{\text{гр}}^+}.$$

Подставляя полученные соотношения в (9), получаем справедливость утверждения леммы. Аналогичный результат имеет место для сопряженного оператора $\mathcal{L}^*$.

Лемма 2. *Для функций $v(t,x)\in W_{\text{гр}+}^+$ справедливо соотношение*

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{W_{\text{гр}}^-} \leqslant C\|v\|_{W_{\text{гр}+}^+}.$$

Лемма 3. *Для всех функций $u(t,x)\in W_{\text{гр}}^+$ имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{\text{гр}+}^-} \geqslant C\|u\|_+,$$

где $\|u\|_+^2 = \int_Q \left(u^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dQ.$

Докажем лемму для гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (5). Введем вспомогательную функцию $v(t, x)$ следующим образом:

$$v = \int_T^t a^{-1}(\tau)\, u(\tau, x)\, d\tau, \quad a(t) \leqslant C < 0, \quad a_t \leqslant C < 0.$$

Очевидно, что $v \in W_{\text{гр}+}^+$. Докажем следующее соотношение:

$$\|v, \mathcal{L}u) \geqslant C\|v\|^2_{W_{\text{гр}+}^+}. \tag{10}$$

Используя операцию дифференцирования по частям и связь между $u(t,x)$ и $v(t,x)$, получаем

$$vu_t = (vu)_t - av_t^2; \tag{11}$$

$$-v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i,j=1}^n [(vA_{ij}u_{x_jt})_{x_i} - (v_{x_i}A_{ij}u_{x_j})_t + aA_{ij}v_{x_it}v_{x_jt}]; \tag{12}$$

$$-v\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\sum_{i,j=1}^n [(vB_{ij}u_{x_j})_{x_i} - (v_{x_i}B_{ij}av_{x_j})_t + v_{x_it}B_{ij}av_{x_j} + v_{x_i}B_{ij}a_tv_{x_j}]. \tag{13}$$

Проинтегрируем полученные соотношения по области Q. Учитывая граничные условия и симметричность матрицы $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^n$ в (13), получим справедливость соотношения (10). Применяя к нему неравенство Гельдера, получаем

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{\text{гр}+}^-} \geqslant C\|v\|_{W_{\text{гр}+}^+}.$$

Отсюда, учитывая соотношение между $u(t, x)$ и $v(t, x)$, следует утверждение леммы для гладких функций, удовлетворяющих условиям (5). Предельным переходом получим справедливость леммы для всех $u \in W^{+}_{\text{гр}}$.

Лемма 4. *Для функции* $v \in W^{+}_{\text{гр}+}$ *справедливо соотношение* $\| \mathcal{L}^* v \|_{W^{-}_{\text{гр}}} \geqslant C \| v \|_{+}$.

Приведенное утверждение доказывается аналогично лемме 3.

Полученные результаты дают возможность выписать функционал, минимизация которого эквивалентна нахождению исходного решения задач 1 и 2 [5].

Теорема 1. *Для любой функции* $\tilde{f} \in L_2(Q)$ *существует единственное решение задачи* 1 *в смысле определения* 1, *принадлежащее* $W^{+}_{\text{гр}}$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $l(v) \equiv (v, f)$. На основании леммы 4 и неравенства Гельдера получим

$$|(v, f)| \leqslant \| v \|_{L_2} \| f \|_{L_2} \leqslant C \| \mathcal{L}^* v \|_{W^{-}_{\text{гр}}}.$$

Из полученного соотношения следует, что функционал $l(v)$ можно рассматривать как линейный непрерывный от $L^* v$. По теореме Хана-Банаха расширяем его линейно и непрерывно на все пространство $W^{-}_{\text{гр}}$. На основании теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала над $W^{-}_{\text{гр}}$ [6] существует функция $u \in W^{+}_{\text{гр}}$ такая, что $l(\omega) = \langle u, \omega \rangle$ для всех $\omega \in W^{-}_{\text{гр}}$. Рассматривая этот функционал на функциях $\omega = \mathcal{L}^* v$, где v — гладкие функции, удовлетворяющие условиям (7), получим $l(\omega) = \langle u, \mathcal{L}^* v \rangle = (u, \mathcal{L}^* v) = (v, f)$.

Отсюда следует существование решения задачи 1 в смысле определения 1. Единственность этого решения доказывается от противного на основании неравенства леммы 3.

Теорема 2. *Для любой функции* $f(t, x) \in W^{-}_{\text{гр}+}$ *существует единственное решение задачи* 1 *в смысле определения* 2.

Доказательство. Ввиду плотности множества $L_2(Q)$ в $W^{+}_{\text{гр}}$ для любого элемента $f(t,x) \in W^{-}_{\text{гр}+}$ существует последовательность функций $f_i(t, x) \in L_2(Q)$ такая, что $\| f_i - f \|_{W^{-}_{\text{гр}+}} \underset{i \to \infty}{\to} 0$.

По теореме 1 для каждой $f_i(t, x) \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи 1 в смысле определения 1. Используя лемму 3 и переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем утверждение теоремы.

Аналогичные результаты справедливы для задачи 2.

Полученные результаты дают возможность доказать существование оптимального импульсно-точечного управления. В этом случае правая часть f уравнения (1) имеет вид $f = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \delta(t - t^i) \delta(x_m - x_m^j) \varphi_{ij}(y)$, где x_m, $m = \overline{1, n}$ — m-я координата точки x, $y = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Управлением являются импульсы t^i, точки x_m^j и интенсивности $\varphi_{ij}(y)$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$.

1. *White L. W.* Point control: Approximations of parabolic problems and pseudo-parabolic problems.— Appl. Anal., 1981, **12**, p. 251—263.
2. *Ting T. W.* Parabolic and pseudo-parabolic partial differention equations.— J. Math. Soc. Jap., 1969, **21**, N 3, p. 441—453.
3. *Ляшко С. И., Маньковский А. А.* Оптимальное импульсное управление системой с распределенными параметрами гиперболического типа.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 4, с. 69—71.
4. *Ляшко С. И., Маньковский А. А.* Одновременная оптимизация моментов и интенсивностей импульсов в задачах управления для параболических уравнений.— Кибернетика, 1983, № 3, с. 81—82, 87.
5. *Диденко В. П.* Вариационный метод решения краевых задач, оператор которых не является симметрическим.— Докл. АН СССР, 1978, **240**, № 6, с. 1277—1280.
6. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 230 с.

Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, Киев

Поступила 22.06.84