УДК 517.5

В. В. Бардзинский

Сильно локальные теоремы приближения периодических функций многих переменных

В работе [1] анонсированы сильно локальные теоремы (прямая и обратная) тригонометрического приближения непрерывной 2π-периодической функции, а также теорема о сильно локальной конструктивной характеристике некоторых важных классов функций.

В настоящей статье доказываются сильно локальные теоремы тригонометрического приближения непрерывной 2π-периодической функции m переменных $(m \geqslant 2)$ — многомерные аналоги результатов из [1]. Решение сильно локальных задач в многомерном случае стало возможным благодаря введению специального локального модуля гладкости, для которого доказываются как прямая, так и обратная сильно локальные теоремы, а также сильно локальная конструктивная характеристика.

Отметим, что приведенные здесь результаты являются сильно локальными аналогами глобальных теорем, полученных в работах [2, 3].

1. Определения и формулировка результатов. В некоторых определениях и выкладках (во избежание громоздкости) мы будем ограничиваться случаем функции двух переменных. Соответствующие определения и выкладки очевидным образом переносятся на общий случай $(m > 2)$.

Через c, $c(\cdot)$ (иногда с индексами) обозначаются константы, вообще говоря, различные, зависящие только от объектов, указанных в скобках.

Пусть на множестве E, лежащем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, задана конечная функция $F(z)$. Фиксируем натуральное k и действительное $N \in [1, \infty)$. Комплексные разделенные разности k-го порядка функции $F(z)$ в точках $z_0, \dots, z_k \in E$ $(z_i \neq z_j \forall i \neq j)$ будем обозначать через $[z_0, \dots, z_k]_F$, а конечные разности — через $[z_0, \dots, z_k; F, z_0]$ (см. [4, с. 31—32, 43—44]).

Пусть $f(x, y)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, а $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ — произвольные фиксированные числа. При фиксированном $y : |y| \leqslant \delta_2$ рассмотрим точечный набор $x_0, \dots, x_k$ такой, что

$$\frac{\delta_1}{|x_i - x_j|} \leqslant N \ (\forall i, j = 0, \dots, k; \quad i \neq j). \tag{1}$$

Обозначим

$$\omega_{k,N,y}(f; 0, 0; \delta_1, 0) = \sup_{x_0, \dots, x_k} |[x_0, \dots, x_k; f, x_0]|, \tag{2}$$

где sup в правой части (2) берется по всем точечным наборам $x_0, \dots, x_k$, удовлетворяющим условию (1), и таким, что $|x_i| \leqslant \delta_1$ $(i = 0, \dots, k)$.

Частный (по переменной x) локальный относительно точки $x = 0$, $y = 0$ равномерный модуль гладкости порядка k функции $f(x, y)$ определим формулой

$$\omega_{k,N}(f; 0, 0; \delta_1, 0) = \sup_{y: |y| \leqslant \delta_2} \omega_{k,N,y}(f; 0, 0; \delta_1, 0).$$

Аналогично вводится величина $\omega_{k,N}(f; 0, 0; 0, \delta_2)$ — частный (по переменной y) локальный равномерный модуль гладкости порядка k функции $f(x, y)$. Вообще, пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ $(m \geqslant 2)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, $i \in [1, m]$ — целое. Через $\omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ 0, \dots, \delta_i, \dots, 0)$ будем обозначать частный (по переменной x_i) локальный (относительно начала координат) равномерный модуль гладкости порядка k функции $f(x_1, \dots, x_m)$.

Пусть $n_1, \dots, n_m$ — произвольные натуральные числа. Через $T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)$ обозначим тригонометрические полиномы вида

$$T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} \dots \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} c_{k_1,\dots,k_m} e^{i(k_1x_1+\dots+k_mx_m)}.$$

Предположим далее, что функция $\mu(h_1, \dots, h_m)$ определена при $h_1 > 0, \dots, h_m > 0$, неубывающая по каждой переменной и удовлетворяет условию

$$\mu(th_1, \dots, th_m) \leqslant at^b \mu(h_1, \dots, h_m) \quad (\forall t \geqslant 1) \tag{3}$$

с постоянными a и b, не зависящими от $h_1, \dots, h_m$ и t.

Пусть выполняются условия

$$|f(x_1, \dots, x_m) - T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)| \leqslant \mu(1/n_1 + |x_1|, \dots, 1/n_m + |x_m|)$$

$$(\forall n_1, \dots, n_m = 1, 2, \dots;\ \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m).$$

При этих предположениях справедлива следующая сильно локальная обратная теорема приближения.

Теорема 1. *Справедливы оценки*

$$\omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ 0, \dots, \delta_i, \dots, 0) \leqslant c(k)\, \delta_i^k \int_{\delta_i}^{1} \mu(\delta_1, \dots, t, \dots, \delta_m)\, t^{-k-1} dt$$

$$(\forall i = 1, \dots, m; \quad \forall \delta_i > 0).$$

Имеет место следующая сильно локальная прямая теорема приближения, являющаяся сильно локальным аналогом прямой глобальной теоремы Тимана [3, с. 288].

Теорема 2. *Пусть*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ 0, \dots, \delta_i, \dots, 0) \leqslant \mu(\delta_1, \dots, \delta_m). \tag{4}$$

Тогда существует такая последовательность $\{T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)\}_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}$ *тригонометрических полиномов, что*

$$|f(x_1, \dots, x_m) - T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)| \leqslant c\mu(1/n_1 + |x_1|, \dots, 1/n_m + |x_m|)$$

$$(\forall n_1, \dots, n_m = 1, 2, \dots;\ \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m).$$

Если теперь определить локальный модуль гладкости порядка k (относительно точки $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$) формулой

$$\omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ \delta_1, \dots, \delta_m) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ 0, \dots, \delta_i, \dots, 0),$$

то из теорем 1 и 2 следует утверждение о сильно локальной конструктивной характеристике.

Теорема 3. *Пусть*

$$\delta_i^k \int_{\delta_i}^{1} \mu(\delta_1, \dots, t, \dots, \delta_m)\, t^{-k-1} dt \leqslant c\mu(\delta_1, \dots, \delta_m) \quad (\forall i = 1, \dots, m). \tag{5}$$

Тогда оценка

$$\omega_{k,N}(f;\ 0, \dots, 0;\ \delta_1, \dots, \delta_m) \leqslant c\mu(\delta_1, \dots, \delta_m)$$

равносильна существованию такой последовательности

$\{T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)\}_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}$, *что* $|f(x_1, \dots, x_m) - T_{n_1,\dots,n_m}(x_1, \dots, x_m)| \leqslant$

$$\leqslant c\mu(1/n_1+|x_1|,\dots,1/n_m+|x_m|)\quad (\forall n_1,\dots,n_m=1,2,\dots;$$
$$\forall (x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m).$$

Замечание 1. Условие (5), например, выполняется, если

$$\mu(\delta_1,\dots,\delta_m)=\delta_1^{\alpha_1}+\dots+\delta_m^{\alpha_m}\quad (\alpha_i\in(0,k);\quad i=1,\dots,m).$$

2. Доказательство теорем 1, 2. Ограничимся случаем двух независимых переменных x и y. При этом всюду в доказательствах через m (или $m-1$) обозначаются степени тригонометрических полиномов относительно переменной y.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим при фиксированном y ($|y|\leqslant\delta_2$) два точечных набора $x_0',\dots,x_{k-1}'$ и $x_0'',\dots,x_{k-1}''$, удовлетворяющих условию равномерности (1) (с заменой k на $k-1$). Пусть $|x_i'|\leqslant\delta_1$, $|x_i''|\leqslant\delta_1$ $(i=0,\dots,k-1)$.

Для произвольных натуральных M, N, P обозначим $T_{(M,N),P}(x,y)=T_{N,P}(x,y)-T_{M,P}(x,y)$. Напишем тождество

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{p-1}T_{(2^i,2^{i+1}),m}(x,y)+T_{2^0,m}(x,y)+f(x,y)-T_{2^p,m}(x,y),\tag{6}$$

в котором p и m удовлетворяют условиям: $e(2k+1)2^p>\delta_1^{-1}\geqslant e(2k+1)\times\times 2^{p-1}$, $m>\delta_2^{-1}$.

В дальнейшем мы используем следующий результат, установленный в [5, с. 55].

Лемма. *Пусть $\mu(h_1)$ определена при $h_1>0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (3) (*при* $m=1$), $1\leqslant p\leqslant q$, q — *целое*, $T(x)$ — *тригонометрический полином степени не выше* q, *удовлетворяющий условию* $|T(x)|\leqslant\mu(1/p+|x|)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$. *Тогда, каковы бы ни были два точечных набора* $x_0',\dots,x_s'$ *и* $x_0'',\dots,x_s''$ *из* $\{\zeta:|\zeta|\leqslant 1/[e(2s+3)p]\}^{s+1}$, *всегда для значения* $h=q/p$ *справедлива оценка*

$$|[x_0'',\dots,x_s'']_T-[x_0',\dots,x_s']_T|\leqslant c(s)\,e^h\,\|x''-x'\|\,\mu(1/p)(h/q)^{-s-1}\ (\forall s=0,1,\dots),$$

где $\|x''-x'\|=\max\limits_{i=0,\dots,s}|x_i''-x_i'|$.

Применим сформулированную лемму к доказательству теоремы 1. Поскольку $|T_{(2^i,2^{i+1}),m}(x,y)|\leqslant c\mu\left(\frac{1}{2^i}+|x|,\ \delta_2\right)$, то из утверждения леммы получается оценка

$$|[x_0'',\dots,x_{k-1}'']_{T_{(2^i,2^{i+1}),m}}-[x_0',\dots,x_{k-1}']_{T_{(2^i,2^{i+1}),m}}|\leqslant c(k)\,\mu\left(\frac{1}{2^i},\ \delta_2\right)2^{ik}$$
$$(i=0,\dots,\ p-1).\tag{7}$$

Из неравенств (7) и (3) следует, что

$$\left|[x_0'',\dots,x_{k-1}'']_{\sum\limits_{i=0}^{p-1}T_{(2^i,2^{i+1}),m}}-[x_0',\dots,x_{k-1}']_{\sum\limits_{i=2}^{p-1}T_{(2^i,2^{i+1}),m}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant c(k)\,\delta_1^k\int_{\delta_1}^{1}\mu(t,\delta_2)\,t^{-k-1}dt.\tag{8}$$

Так как $T_{2^0,m}(x,y)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше единицы относительно переменной x и, кроме того,

$$|T_{2^0,m}(x,y)|\leqslant\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|f(x,y)|+\mu(|x|+1,\ \delta_2),$$

то из приведенной леммы выводим оценку

$$|[x_0'',\dots,x_{k-1}'']_{T_{2^0,m}}-[x_0,\dots,x_{k-1}']_{T_{2^0,m}}|\leqslant c(k)\,\delta_1.\tag{9}$$

Используя формулу для представления разделенных разностей (см. [4, с. 32]), получаем

$$|[x'_0, \ldots, x'_{k-1}]_{f-T_{2^p,m}}| \leqslant c(k)\, \delta_1^{1-k} \mu(\delta_1, \delta_2), \tag{10}$$

$$|[x''_0, \ldots, x''_{k-1}]_{f-T_{2^p,m}}| \leqslant c(k)\, \delta_1^{1-k} \mu(\delta_1, \delta_2). \tag{11}$$

Учитывая известное соотношение между конечными и разделенными разностями (см., например, [4, с. 44]), а также неравенства (6 , (8)—(11), приходим к оценке

$$\omega_{k,N}(f;\ 0,\ 0;\ \delta_1,\ 0) \leqslant c(k) \left\{ \delta_1^k \int\limits_{\delta_1}^{1} \mu(t, \delta_2)\, t^{-k-1} dt + \delta_1^k + \mu(\delta_1, \delta_2) \right\},$$

из которой следует одно из требуемых неравенств. Оценка величины $\omega_{k,N}(f;\ 0,\ 0;\ 0,\ \delta_2)$ получается аналогично. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим тригонометрические полиномы

$$T_{n,m}(x, y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t_1) K_{m-1}(t_2) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} f(x + it_1,$$
$$y + jt_2)\, dt_1 dt_2,$$

где $K_{n-1}(t_1)$ и $K_{m-1}(t_2)$ — ядра Джексона достаточно высоких степеней (см., например, [6, с. 225]). При этом будем иметь

$$T_{n,m}(x, y) - f(x, y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t_1) K_{m-1}(t_2) \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} f(x + it_1, \right.$$
$$\left. y + jt_2) \binom{k}{i} \binom{k}{j} - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} f(x, y + jt_2) \right\} dt_1 dt_2 + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\{ K_{n-1}(t_1) \times \right.$$
$$\left. \times K_{m-1}(t_2) \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} f(x, y + jt_2) - f(x, y) \right\} dt_1 dt_2. \tag{12}$$

Оценим каждое слагаемое правой части тождества (12). Так как (см. неравенство (4), а также определение локального модуля гладкости)

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} \binom{k}{i} \binom{k}{j} f(x + it_1,\ y + jt_2) - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} f(x, y + jt_2) \right| =$$
$$= \left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+j-1} \binom{k}{i} \binom{k}{j} f(x + it_1,\ y + jt_2) \right| \leqslant c(k)\, \mu(|x| + |t_1|,\ |y| + |t_2|),$$

то

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t_1) K_{m-1}(t_2) \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{i} \binom{k}{j} f(x + it_1,\ y + jt_2) - \right. \right.$$
$$\left. \left. - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} f(x, y + jt_2) \right\} dt_1 dt_2 \right| \leqslant c(k) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_{m-1}(t_2)|\, |K_{n-1}(t_1)| \times$$
$$\times \mu(|x| + |t_1|,\ |y| + |t_2|)\, dt_1 dt_2.$$

Если $|t_1| \leqslant \frac{1}{n}$, а $|t_2| \leqslant \frac{1}{m}$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_{m-1}(t_2)|\, |K_{n-1}(t_1)|\, \mu(|x| + |t_1|,\ |y| + |t_2|)\, dt_1 dt_2 \leqslant$$
$$\leqslant c\mu(|x| + 1/n,\ |y| + 1/m). \tag{13}$$

Пусть $|t_1| \leqslant 1/n$, а $|t_2| > 1/m$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_{m-1}(t_2)|\,|K_{n-1}(t_1)|\,\mu(|x|+|t_1|,\ |y|+|t_2|)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 m^b \int_{-\pi}^{\pi} |K_{m-1}(t_2)|\,\mu(|x|+1/n,\ |y|+1/m)\,\mathrm{d}t_2 \leqslant c_2\mu(|x|+1/n,\ |y|+1/m). \tag{14}$$

Здесь мы воспользовались свойствами ядра Джексона (см. [6, с. 225]) и условием (3). Иные случаи ($|t_1| > 1/n$, $|t_2| \leqslant 1/m$; $|t_1| > 1/n$, $|t_2| > 1/m$ исследуются аналогично.

Оценим второе слагаемое правой части тождества (12)

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{m-1}(t_2)\,K_{n-1}(t_1)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}\{f(x,\ y+jt_2)-f(x,\ y)\}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right| =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} K_{m-1}(t_2)\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(x,\ y+jt_2)\,\mathrm{d}t_2\right| \leqslant c\int_{-\pi}^{\pi}|K_{m-1}(t_2)|\times$$

$$\times\mu(|x|,\ |y|+|t_2|)\,\mathrm{d}t_2 \leqslant c_1\mu(|x|,\ |y|+1/m). \tag{15}$$

Соединяя оценки (13)—(15), приходим к требуемому неравенству. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Мы вводили локальные равномерные модули гладкости относительно начала координат. Однако, как легко видеть, эти модули могут быть введены относительно любой иной точки из $\mathbb{R}^m$ и для них фактически получены прямая и обратная сильно локальные теоремы тригонометрического приближения и сильно локальная конструктивная характеристика.

1. *Бардзинский В. В.* Локальные теоремы приближения периодических функций.— Киев, 1977.— 6 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 77.10).
2. *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций многих переменных.— Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, с. 1207—1209.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
4. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 271 с.
5. *Бардзинский В. В.* Конечно-разностные гладкости и приближение функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1978.— 127 с.
6. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, **15**, № 3, с. 219—242.
7. *Тамразов П. М.* Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения.— Киев, 1975.— 24 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 75.10).

Укр. ин-т инженеров вод. хоз.

Поступила 03.11.83