УДК 517.946.2

С. А. Бойцун

Краевая задача для нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим для простоты одно нелинейное дифференциальное уравнение

$$y^{(2k)}(x) = f[x, \mu, y] \equiv f(x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l, y(\lambda(x))) \tag{1}$$

с условиями

$$\alpha y^{(2\nu-2)}(0) + \beta y^{(2\nu-1)}(0) = 0, \quad \gamma y^{(2\nu-2)}(1) + \delta y^{(2\nu-1)}(1) = 0, \tag{2}$$

где $\nu = \overline{1, k}$; $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, α, β противоположных знаков, а γ и δ одинаковых знаков, $\lambda(x) = x - \tau(x)$, $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu\}$ — параметры. Отклонение $\tau(x)$ — известная при $x \in [0,1]$ непрерывная функция, определяющая соответственно начальное множество E или S (см. [1]).

Пусть
$$y(x)|_E = \varphi(x) \text{ или } y(x)|_S = \psi(x), \tag{3}$$
причем $\alpha\varphi^{(2\nu-2)}(0) + \beta\varphi^{(2\nu-1)}(0) = 0, \quad \gamma\psi^{(2\nu-2)}(1) + \delta\psi^{(2\nu-1)}(1) = 0.$

Считаем, что в некоторой замкнутой области $\overline{D}$ функция $f[x, \mu, y]$ непрерывна относительно x, μ_1, μ_2, ..., μ_l и существует производная первого порядка, удовлетворяющая условию
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y(\lambda(x))}\right| \leqslant N. \tag{4}$$

Обозначим
$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha t - \beta)[\gamma(x-1) - \delta]}{\beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\delta}, & 0 \leqslant t \leqslant x; \\ \dfrac{(\alpha x - \beta)[\gamma(t-1) - \delta]}{\beta\gamma - \alpha\gamma - \alpha\delta}, & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$(-1)^k \int_0^1 G(x, t_1)\,dt_1 \int_0^1 G(t_1, t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^1 G(t_{k-1}, t_k)\,g(t_k, \mu)\,dt_k = Hg.$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y(\lambda(x))} + 2(-1)^k N\right| \leqslant M, \quad A[Z_n - V_n] = N\{Z_n - V_n\},$$

$$d = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 G(x, t)\,dt, \quad \Omega[W_n] = \left\{\frac{\widetilde{\partial f}}{\partial y(\lambda(x))} + (-1)^k N\right\} W_n,$$

$$R_n,\ Q_n,\ D_n,\ C_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) —$$

числовые параметры, удовлетворяющие условию
$$0 \leqslant R_n < Q_n, \quad 0 \leqslant D_n < C_n, \quad R_n + Q_n = 1, \quad D_n + C_n = 1 \tag{5}$$
или
$$0 \leqslant Q_n < R_n, \quad 0 \leqslant D_n < C_n, \quad R_n + Q_n = 1, \quad D_n + C_n = 1. \tag{6}$$

Пусть функции $Z_1(x)$, $V_1(x)$ класса $C^{(2k)}[0, 1]$ удовлетворяют условия (2), (3), неравенства
$$V_1(x) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} Z_1(x), \quad Z_1^{(2k-2r)}(x) \leqslant V_1^{(2k-2r)}(x), \quad V_1^{(2k-2s)}(x) \leqslant Z_1^{(2k-2s)}(x), \tag{7}$$
k — нечетное (четное), $r = 0, 2, 4, \ldots, k-1$ $(r = 0, 2, 4, \ldots, k)$: $s = 1, 3, 5, \ldots, k$ $(s = 1, 3, 5, \ldots, k-1)$ такие, что при $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ справедливы соотношения
$$\begin{gathered} Z_1^{(2k)}(x) - f[x, \mu, C_1 Z_1 + D_1 V_1] - (-1)^k (C_1 - D_1) A[Z_1 - V_1] = \alpha_1[x, \mu] \leqslant 0, \\ V_1^{(2k)}(x) - f[x, \mu, C_1 V_1 + D_1 Z_1] + (-1)^k (C_1 - D_1) A[Z_1 - V_1] = \beta_1[x, \mu] \geqslant 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Определим последовательности функций $\{Z_{n+1}[x, \mu]\}$, $\{V_{n+1}[x, \mu]\}$ по формулам
$$\begin{gathered} Z_{n+1}[x, \mu] = Q_n Z_n[x, \mu] + R_n V_n[x, \mu] - \sigma_n[x, \mu], \\ V_{n+1}[x, \mu] = Q_n V_n[x, \mu] + R_n Z_n[x, \mu] - \omega_n[x, \mu], \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \sigma_n[x, \mu] = \begin{cases} 0, & x \in E, \quad x \in S, \\ H(Q_n \alpha_n + R_n \beta_n), & x \in [0, 1], \end{cases} \\ \omega_n[x, \mu] = \begin{cases} 0, & x \in E, \quad x \in S; \\ H(Q_n \beta_n + R_n \alpha_n), & x \in [0, 1], \end{cases} \end{gathered} \tag{10}$$

$$\alpha_n[x,\mu] = Z_n^{(2k)}[x,\mu] - f[x,\mu, C_nZ_n + D_nV_n] - (-1)^k(C_n - D_n)A[Z_n - V_n],$$
$$\beta_n[x,\mu] = V_n^{(2k)}[x,\mu] - f[x,\mu, C_nV_n + D_nZ_n] + (-1)^k(C_n - D_n)A[Z_n - V_n],$$
$$Z_n[x,\mu] \equiv Z_n(x,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l), \quad V_n[x,\mu] \equiv V_n(x,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l). \tag{11}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть при* $x \in [0, 1]$ *в области* $\overline{D}$ *функции* $Z_1[x,\mu] \equiv Z_1(x)$, $V_1[x,\mu] \equiv V_1(x)$ *класса* $C^{(2k)}[0,1]$ *удовлетворяют условия* (2), (3), *неравенства* (7) *и при* $D_1 = 0$, $C_1 = 1$ *соотношения* (8), *а функция* $f[x,\mu,y]$ *уравнения* (1) *непрерывна относительно* $x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ *и существует производная первого порядка, удовлетворяющая условию* (4). *Тогда при* $Md^k < 1$ *имеют место неравенства* $V_1(x) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} y \underset{(\geqslant)}{\leqslant} Z_1(x)$, $Z_1^{(2k-2r)}(x) \leqslant y^{(2k-2r)} \leqslant V_1^{(2k-2r)}(x)$, $V_1^{(2k-2s)}(x) \leqslant y^{(2k-2s)} \leqslant Z_1^{(2k-2s)}(x)$, k — *нечетное (четное)*, $r = 0, 2, 4, \ldots, k-1$ $(r = 0, 2, 4, \ldots, k)$; $s = 1, 3, 5, \ldots, k$, $(s = 1, 3, 5, \ldots, k-1)$.

Теорема 2. *Пусть функции* $Z_1(x)$, $V_1(x)$ *и* $f[x,\mu,y]$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а параметры* R_n, Q_n, D_n, C_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *удовлетворяющие условию* (5) *такие, что справедливы соотношения* (8) *и неравенства*

$$\begin{gathered} Q_n\{\Omega[Z_n - Z_{n+1}] - D_n\Omega[Z_n - V_n] + (-1)^kA[V_{n+1} - V_n] - (-1)^kD_nA[Z_n - \\ - V_n]\} + R_n\{\Omega[V_n - Z_{n+1}] + D_n\Omega[Z_n - V_n] + (-1)^kA[V_{n+1} - Z_n] + \\ + (-1)^kD_nA[Z_n - V_n]\} \leqslant 0, \\ Q_n\{\Omega[V_n - V_{n+1}] + D_n\Omega[Z_n - V_n] + (-1)^kA[Z_{n+1} - Z_n] + \\ + (-1)^kD_nA[Z_n - V_n]\} + R_n\{\Omega[Z_n - V_{n+1}] - D_n\Omega[Z_n - V_n] + \\ + (-1)^kA[Z_{n+1} - V_n] - (-1)^kD_nA[Z_n - V_n]\} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{12}$$

следовательно, тем более выполняются неравенства $\alpha_{n+1}[x,\mu] \leqslant 0$, $\beta_{n+1}[x,\mu] \geqslant 0$. *Тогда при* $Md^k < 1$ *последовательности функций* $\{Z_{n+1}[x,\mu]\}$, $\{V_{n+1}[x,\mu]\}$, *определенные по формулам* (9) — (11), *удовлетворяют цепи неравенств*

$$\begin{gathered} V_n[x,\mu] \underset{(\geqslant)}{\leqslant} V_{n+1}[x,\mu] \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \ldots \underset{(\geqslant)}{\leqslant} y[x,\mu] \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \ldots \underset{(\geqslant)}{\leqslant} Z_{n+1}[x,\mu] \underset{(\geqslant)}{\leqslant} Z_n[x,\mu], \\ Z_n^{(2k-2r)}[x,\mu] \leqslant Z_{n+1}^{(2k-2r)}[x,\mu] \leqslant \ldots \leqslant y^{(2k-2r)}[x,\mu] \leqslant \ldots \leqslant V_{n+1}^{(2k-2r)}[x,\mu] \leqslant \\ \leqslant V_n^{(2k-2r)}[x,\mu], \quad V_n^{(2k-2s)}[x,\mu] \leqslant V_{n+1}^{(2k-2s)}[x,\mu] \leqslant \ldots \leqslant y^{(2k-2s)}[x,\mu] \leqslant \ldots \\ \ldots \leqslant Z_{n+1}^{(2k-2s)}[x,\mu] \leqslant Z_n^{(2k-2s)}[x,\mu], \end{gathered} \tag{13}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$; k — *нечетное (четное)*, $r = 0, 2, 4, \ldots, k-1$ $(r = 0, 2, 4, \ldots, k)$; $s = 1, 3, 5, \ldots, k$ $(s = 1, 3, 5, \ldots, k-1)$, *причем эти последовательности абсолютно и равномерно вместе с производными до 2k-го порядка включительно сходятся к* $y[x,\mu]$ *и соответственным производным от* $y[x,\mu]$, *где* $y[x,\mu]$—*единственное и непрерывное решение как функции от* x *и параметров* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ *задачи* (1)—(3). *Это решение непрерывно относительно* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ *в области* $\mu_i^{(0)} \leqslant \mu_i \leqslant \mu_i^{(1)}$ $(i = \overline{1, l})$ *и равномерно непрерывно относительно* x *во всем интервале* $x \in [0, 1]$. *Если параметры* R_n, Q_n, D_n, C_n, *удовлетворяющие условиям* (6), *такие, что справедливы соотношения* (8) *и знаки в неравенствах* (12) *при* $n = 2\gamma - 1$ $(n = 2\gamma)$, $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$ ..., *противоположны (совпадают), следовательно, тем более выполняются неравенства* $\alpha_{2\gamma}[x,\mu] \geqslant 0$, $\alpha_{2\gamma+1}[x,\mu] \leqslant 0$, $\beta_{2\gamma}[x,\mu] \leqslant 0$, $\beta_{2\gamma+1}[x,\mu] \geqslant 0$, *тогда вместо цепей неравенств* (13) *получим скачкообразный процесс, описанный в* [1].

1. *Ковач Ю. И., Брич И. В.* Исследование одной нелинейной краевой задачи аналитическим двусторонним методом.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 5, с. 675—678.

Львов. политехн. ин-т

Поступила 12.10.84