УДК 517.923

Э. Н. Береславский

Об одном случае конформного отображения круговых четырехугольников посредством элементарных функций

1. Задача конформного отображения канонической области на круговые многоугольники имеет полное и эффективное решение только для случая треугольника. Для кругового четырехугольника решение задачи сопряжено с трудностями принципиального характера, поскольку здесь уже появляются неизвестные параметры, связь которых с геометрическими характеристиками четырехугольника заранее неизвестна, и до настоящего времени не существует общего способа для их нахождения [1]. Поэтому в практических расчетах отображающую функцию приходится определять косвенными методами, опирающимися на приближенные построения обычно в виде рядов по степеням малого параметра (см., например, [2, 3] и приводимую там библиографию).

Отображающая функция может быть найдена в замкнутой форме через эллиптические функции для круговых четырехугольников в так называемых полярных сетках [1]. Такие четырехугольники с помощью логарифма преобразуются в прямолинейные пятиугольники, для отображения которых применяется интеграл Кристоффеля—Шварца [1, с. 319—325].

Случаев же круговых четырехугольников, отличных от упомянутых выше, которые элементарными функциями отображаются на каноническую область, по-видимому, неизвестно. В данной заметке приводится эффективное решение задачи о конформном отображении полуполосы $u > 0$, $0 < v < \pi/2$ плоскости $w = u + iv$ на круговой четырехугольник $\{\pi/2, \pi/2, \pi\nu, 2\pi\}$ (согласно терминологии [1]).

2. Рассмотрим в плоскости $z = x + iy$ круговой четырехугольник $ABCD$ с прямыми углами при вершинах A и D и углом $\pi\nu = 2 \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ при вершине B, две стороны которого BC и CD имеют общую часть, образуя угол при вершине C, равный 2π. Параметрическое уравнение контура рассматриваемого четырехугольника имеет следующий вид:

$$\operatorname{Im} z(w) = 0, \quad 0 < u < +\infty;$$

$$\operatorname{Re} z(w) = 0, \quad 0 < \operatorname{Im} z(w) < +\infty, \quad 0 < v < \lambda;$$

$$\operatorname{Re} z(w) = 0, \quad -\infty < \operatorname{Im} z(w) < -\varepsilon, \quad \lambda < v < \pi/2;$$

$$|z(w) - (1-\varepsilon)/2| = (1+\varepsilon)/2, \quad v = \pi/2, \quad 0 < u < +\infty;$$

при этом предполагается, что вершинам A, B и D соответствуют точки $w = 0$, ∞ и $\pi/2i$ полуполосы.

В процессе решения одного случая плоской установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости (по закону Дарси) в однородном изотропном недеформируемом грунте получен следующий важный результат.

Функция, дающая конформное отображение полуполосы плоскости w на круговой четырехугольник плоскости z, имеет выражение

$$z(w) = \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\alpha \operatorname{sh}(1+\nu) w + \beta \operatorname{sh}(1-\nu) w}{\alpha \operatorname{ch}(1+\nu) w - \beta \operatorname{ch}(1-\nu) w}, \tag{1}$$

где $\alpha = \cos(1-\nu)\lambda$, $\beta = \cos(1+\nu)\lambda$; λ — неизвестный заранее параметр, подлежащий определению. Неизвестным также остается и прообраз вершины разреза C.

Анализ (1) показывает, что функция z достигает своего экстремума, равного z_C, на стороне $w = u + \pi/2i$ при значении $u = u_C = 0{,}5 \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$, где $t = [\beta^2 - \alpha^2 - \nu(\alpha^2 + \beta^2)]/(2\alpha\beta\nu)$. При этом должно выполняться условие

$$\pi/[2(1+\nu)] < \lambda < \pi/2, \tag{2}$$

регламентирующее положение вершины разреза C.

Координата точки C плоскости z определяется выражением

$$z_C = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{(1+\varepsilon)\,ab + \sqrt{\varepsilon}\,i\,(a^2 - b^2)}{\varepsilon^2 a^2 + b^2}\,, \tag{3}$$

где $a = \alpha\,\mathrm{sh}\,(1+\nu)\,u_C - \beta\,\mathrm{sh}\,(1-\nu)\,u_C$, $b = \alpha\,\mathrm{ch}\,(1+\nu)\,u_C + \beta\,\mathrm{ch}\,(1-\nu)\,u_C$, которое служит для нахождения параметра λ.

$\varepsilon=0{,}01$		$\varepsilon=0{,}1$		$\varepsilon=0{,}5$		$\varepsilon=0{,}9$	
λ	y_C	λ	y_C	λ	y_C	λ	y_C
0,88709	0,00026	0,94029	0,00263	1,03616	0,01214	1,08914	0,01984
0,96306	0,00104	1,01035	0,00959	1,09566	0,03829	1,14265	0,05847
1,03903	0,00246	1,08040	0,02131	1,15496	0,07680	1,19617	0,11185
1,11499	0,00485	1,15046	0,03924	1,21437	0,12870	1,24969	0,17975
1,19096	0,00883	1,22051	0,06616	1,27377	0,19638	1,30321	0,263310
1,26693	0,01582	1,29057	0,10739	1,33318	0,28370	1,35672	0,36324
1,34289	0,02941	1,36062	0,17323	1,39258	0,39644	1,41024	0,48377
1,41886	0,06100	1,43068	0,28621	1,45198	0,54328	1,46376	0,62682
1,49482	0,16407	1,50074	0,43511	1,51139	0,73750	1,51727	0,79705

Справедливость выражения (1) при условии (2), а также равенства (3) устанавливается непосредственной проверкой.

Согласно расчетам, при фиксировании параметра $\varepsilon \in (0,\ 1)$ правая часть уравнения (3) монотонно возрастает по параметру λ с возрастанием последнего в интервале $(\pi/[2\,(1+\nu)],\ \pi/2)$ и таким образом устанавливается однозначная разрешимость уравнения (3) относительно искомого корня λ. В таблице приведены вычисленные с помощью (3) некоторые семейства круговых четырехугольников при фиксировании одной вершины A (варьируются значения ε и параметр $\lambda = \lambda_k = \pi\,(1 + 0{,}1\ \nu k)/[2\,(1+\nu)]$, $k = 1, 2, \ldots, 9$) или двух вершин A и D (варьируется только параметр λ).

При $\lambda = \pi/[2\,(1+\nu)]$ или $\lambda = \pi/2$ круговой разрез вырождается в дугу окружности, а круговой четырехугольник — в треугольник. В первом случае $z_C = z_D = -\varepsilon i$ и отображающая функция (1) принимает вид $z = \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{th}\,(1+\nu)\,w$; во втором — $z_C = z_D = i$ и $z = \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{th}\,\nu w$.

1. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 406 с.
2. *Береславский Э. Н.* Об одном методе конформного отображения круговых четырехугольников.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 197—201.
3. *Береславский Э. Н.* О конформном отображении на прямоугольник круговых четырехугольников с двумя прямыми и двумя произвольными углами.— Изв. вузов. Математика, 1981, **226**, № 3, с. 16—20.

Ленингр. инженерно-строит. ин-т Поступила 11.11.84