УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, В. Гр. Самойленко

Дифференциально-разностные динамические системы, ассоциированные с разностным оператором Дирака, и их полная интегрируемость

1. Рассмотрим следующую разностную (обобщенную) спектральную задачу типа Дирака:

$$f_{n+1}(t, \lambda) = \mathcal{A}_n(\lambda) f_n(t, \lambda), \qquad \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(t, \lambda)| < \infty, \quad f_n(t, \lambda) \in \mathbb{C}^2,$$

$$\mathcal{A}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \psi_n(t) \\ \psi_n^*(t) & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \prod_{n=0}^{N} (1 - \psi_n^*(t)\,\psi_n(t)) \neq 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}^1$ — спектральный параметр, функция $\psi_n(t) \in \mathbb{C}^1$ периодична с периодом $N+1$ по индексу $n \in \mathbb{Z}$.

В силу периодичности матрицы $A_n(\lambda)$ по n существует матрица монодромии $S_n(\lambda)$ для решений уравнения (1), определяемая при помощи сдвига на период решения $f_n(t, \lambda)$, $n \in Z$:

$$f_{n+N+1}(t, \lambda) = S_n(\lambda)\, f_n(t, \lambda). \tag{2}$$

С целью изучения спектральных свойств задачи (1) рассмотрим подробнее свойства матрицы монодромии $S_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $F_n(n_0)$ — фундаментальное решение задачи (1), т. е. $F_{n+1}(n_0) = \mathcal{A}_n(\lambda)\, F_n(n_0)$, $F_{n_0}(n_0) \equiv I$, $n_0 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$S_n(\lambda) = F_{n+N+1}(n_0) = \prod_{j=0}^{\overset{\frown}{N}} \mathcal{A}_{n+j}(\lambda) = \mathcal{A}_{n+N}(\lambda)\, \mathcal{A}_{n+N-1}(\lambda) \ldots \mathcal{A}_n(\lambda). \tag{3}$$

Отсюда получаем разностное уравнение для матрицы монодромии $S_n(\lambda)$ [1, 2]

$$S_{n+1}(\lambda)\, \mathcal{A}_n(\lambda) = \mathcal{A}_n(\lambda)\, S_n(\lambda). \tag{4}$$

В силу (2) число $\lambda \in \mathbb{C}^1$ принадлежит спектру $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда собственные значения $\xi_n(\lambda)$ матрицы монодромии $S_n(\lambda)$ по модулю равны единице, т. е. $|\xi_n(\lambda)| = 1$, $\det \| S_n(\lambda) - I\xi_n(\lambda) \| = 0$ Отсюда $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, если $|\xi_n(\lambda)| = |\Delta_n(\lambda) + \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}| = 1$, где $\Delta_n(\lambda) = \operatorname{tr} S_n(\lambda)/2$, откуда находим $\Delta_n^2(\lambda) \leqslant 1$, $\operatorname{Im} \Delta_n(\lambda) = 0$.

Из формулы (4) следует, что величины $\det S_n(\lambda) = \prod_{j=0}^{N} h_{j+n}$, $h_j = 1 - \psi_j \psi_j^*$, $j \in \mathbb{Z}$, и $\Delta_n(\lambda)$ от индекса $n \in \mathbb{Z}$ не зависят. Кроме того, из (1 также находим $\Delta(\lambda^{*-1}) = \Delta^c(\lambda)$, $\Delta(-\lambda) = (-1)^{N+1} \Delta(\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}^1$, причем $\Delta(\lambda)$ — рациональная функция от $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Если $|\lambda| = 1$, то функция $\Delta(\lambda)$, очевидно, действительная; отсюда следует, что часть спектра $\sigma(\mathcal{A})$ лежит на окружности $|\lambda| = 1$, а другая — за ее пределами. В общем виде спектр $\sigma(\mathcal{A})$ непрерывен, является $2N$-зонным, причем окрестности точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ заведомо принадлежат запрещенной области изменения параметра $\lambda \in \mathbb{C}^1$ (т. е. принадлежат области неустойчивости [3 — 5]).

Таким образом, спектр $\sigma(A)$ состоит из конечного числа дуг с границами в точках λ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2N+2$, являющихся решениями уравнения $\Delta^2(\lambda) = 1$.

2. Перейдем к анализу свойств спектра $\sigma(\mathcal{A})$ при инфинитезимальных вариациях матрицы $\mathcal{A}_n(\lambda)$ в классе периодических по индексу $n \in \mathbb{Z}$ функций $\psi_n(t) \in \mathbb{C}^1$. Для вариации $\delta S_n(\lambda)$ из (1), (2) имеем:

$$\delta S_n(\lambda) = S_n(\lambda) \sum_{k=0}^{N} F_k^{-1}(n_0)\, \mathcal{A}_k^{-1}(\lambda)\, \delta\mathcal{A}_k(\lambda)\, F_k(n_0). \tag{5}$$

Отсюда находим вариационные производные

$$\frac{\delta\Delta(\lambda)}{\delta\psi_n} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ S_n(\lambda)\, \mathcal{A}_n^{-1}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{S_n^{(21)} \lambda^{-1} - S_n^{(22)} \psi_n^*}{2(1 - \psi_n \psi_n^*)},$$

$$\frac{\delta\Delta(\lambda)}{\delta\psi_n^*} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ S_n(\lambda)\, \mathcal{A}_n^{-1}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{\lambda S_n^{(12)} - S_n^{(11)} \psi_n}{2(1 - \psi_n \psi_n^*)}, \tag{6}$$

где обозначено $S_n(\lambda) = (S_n^{(ij)})$, $i, j = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Используя уравнения (4), после несложных вычислений находим следующее «рекурсионное» соотношение:

$$\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,\Delta(\lambda) = \mathcal{L}\lambda^2\,\mathrm{grad}\,\Delta(\lambda). \tag{7}$$

Здесь $\mathrm{grad}\,\Delta(\lambda) = (\delta\Delta(\lambda)/\delta\psi_n,\ \ \delta\Delta(\lambda)/\delta\psi_n^*)^\tau$ (τ — знак транспонирования), $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\cdot\mathcal{M}_2$,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & h_n \\ -h_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} (h_n - \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n^*)E_1 & (\psi_n^2 + \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n)E_{-1} \\ \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n^*E_1 & -(1+\psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n)E_{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n & h_n - \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n^* \\ 1+\psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n & -(\psi_n^{*^2} + \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n^*) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

символы ∂_n^{-1} и ∂_n обозначают следующее:

$$\partial_n^{-1}(\psi_n f_n) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=n_0}^{n-1}(\psi_k f_k) - \sum_{k=n}^{n_0+N}(\psi_k f_k)\right|, \quad E_{\pm1}f_n = f_{n\pm1}, \quad \partial_n f_n = f_{n+1} - f_n,$$

$$\partial_n^{-1}\partial_n = \partial_n\partial_n^{-1} = 1,$$

f_n — некоторая функция, $n\in\mathbb{Z}$.

Прямым вычислением проверяется, что операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ являются симплектическими относительно билинейной формы $(f,g) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N+1} f_k g_k$ (n_0 — произвольное целое число), т. е. для любых функционалов F, G, H на пространстве последовательностей $D = \{\psi_n, \psi_n^* : n\in\mathbb{Z}\}$ справедливы соотношения Якоби:

$$\{F,G\}_{\mathcal{L}} = -\{G,F\}_{\mathcal{L}}, \qquad \{F,G\}_{\mathcal{M}} = -\{G,F\}_{\mathcal{M}}, \qquad \{\{F,G\}_{\mathcal{L}},H\}_{\mathcal{L}} +$$
$$+\{\{G,H\}_{\mathcal{L}},F\}_{\mathcal{L}} + \{\{H,F\}_{\mathcal{L}},G\}_{\mathcal{L}} = 0, \{\{F,G\}_{\mathcal{M}},H\}_{\mathcal{M}} + \{\{G,H\}_{\mathcal{M}},F\}_{\mathcal{M}} +$$
$$+\{\{H,F\}_{\mathcal{M}},G\}_{\mathcal{M}} = 0, \tag{9}$$

где $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}}$, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{M}}$ — стандартные скобки Пуассона:

$$\{F,G\}_{\mathcal{L}} = (\mathrm{grad}\,F, \mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,G), \qquad \{F,G\}_{\mathcal{M}} = (\mathrm{grad}\,F, \mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,G). \tag{10}$$

Рассмотрим величину $\Delta(\lambda)$ как производящую функцию для функционалов C_j, $j\in\mathbb{Z}$, на пространстве D: $\Delta(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} C_j\lambda^{-2j}$. В силу формул (7), (9) заключаем, что все функционалы C_j, $j\in\mathbb{Z}$, находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона: $\{C_j, C_k\}_{\mathcal{L}} = \{C_j, C_k\}_{\mathcal{M}} = 0$, $j,k\in\mathbb{Z}$. Таким образом, если определить «производящую» гамильтонову систему на пространстве D по правилу

$$\partial F/\partial t = \{\Delta(\lambda), F\}_{\mathcal{L}}, \quad F\in D, \tag{11}$$

то все функционалы C_j, $j\in Z$, будут, очевидно, ее законами сохранения, которые находятся в инволюции. Последнее означает полную интегрируемость по Лиувиллю динамической системы (11), в частности ее интегрируемость в квадратурах [1—6].

3. В дальнейшем удобно будет использовать другую последовательность законов сохранения для динамической системы (11), построенных по правилу

$$p(\lambda) = \ln(\Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta^2(\lambda)-1}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} H_j\lambda^{-2j}, \qquad H_0 = -\sum_{n=0}^{N}\ln h_n,$$

$$H_{\pm1} = \sum_{n=0}^{N}\psi_n\psi_{n\pm1}^*, \qquad H_{\pm2} = \sum_{n=0}^{N}[\psi_{n\pm1}\psi_{n\mp1}^* h_n - (\psi_n\psi_{n\mp1}^*)^2/2], \ldots \tag{12}$$

Величины H_j, $j \in Z_+$, легко вычисляются из дискретного уравнения типа Риккати, вытекающего из (1)

$$(\chi_{n+1}(\lambda) - \lambda)\chi_n(\lambda) + \psi_{n+1}(t)(h_n(t) - \lambda^{-1}\chi_n(\lambda))\psi_n^{-1}(t) = 0,$$

$$p(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \ln \chi_n(\lambda), \tag{13}$$

и его решения в виде асимптотического ряда $\chi_n(\lambda) = \lambda + \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j^{(n)}\lambda^{-2j-1}$ при $|\lambda| \to \infty$. Если, в частности, выбрать для динамической системы вида (11) функцию Гамильтона в виде $H = (-2H_0 + H_1 + H_{-1})\,i$, то получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_n = \{H, \psi_n\}_{\mathscr{L}} = \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1} - |\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}), \tag{14}$$

представляющее собой дискретное приближение для нелинейного уравнения Шредингера [6—8], имеющего многочисленные приложения в физике [9, 10]. Если использовать в качестве функции Гамильтона функционал $\tilde{H} = H_0 - H_2$, получим другое важное для приложений уравнение — нелинейное дискретное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза [1, 2, 8, 9]:

$$\partial\psi_n/\partial t = \{\tilde{H}, \psi_n\}_{\mathscr{M}} = (1 - \psi_n^2)(\psi_{n+1} - \psi_{n-1}), \tag{15}$$

где $\psi_n(t) \in \mathbb{R}^1$, $\forall t \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}$. В связи с возникающей иерархией дифференциально-разностных уравнений заметим, что симплектические операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ порождают естественным образом иерархию симплектических операторов $\mathscr{M}_j = \mathscr{L}(\Lambda)^j$, $j \in \mathbb{Z}$, где $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$ — так называемый «рекурсионный» оператор для спектральной задачи (1).

4. Исследуем задачу восстановления матрицы $\mathscr{A}_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}/(N+1)$, по спектральным данным задачи (1). В множество спектральных данных включаем границы $\pm\lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, N+1$, непрерывного спектра $\sigma(\mathscr{A})$, $\Delta^2(\pm\lambda_j) = 1$, а также точки $\pm\sqrt{\mu_{jn_0}} \in \mathbb{C}^1$, $j = 1, 2, \ldots, N$, являющиеся полюсами собственной функции Блоха (функции Бейкера — Ахиезера) [10] по параметру $\lambda \in \Gamma$, где Γ — риманова поверхность функции $\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}$. Так как функция $\Delta^2(\lambda) - 1 = P_N(\lambda^2)\lambda^{-2(N+1)}$, где $P_N(\lambda^2)$ — полином по λ^2 степени $2N+2$, четная по λ, введем новый параметр $z = \lambda^2 \in \Gamma_0 = \Gamma/\mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим асимптотики первой компоненты собственной функции Блоха $\bar{f}_n^{(1)}(z)$, $z \in \Gamma_0$ при $z \to \infty^{\pm} \in \Gamma_0$ и $z \to 0^{\pm} \in \Gamma_0$. Имеем:

$$\bar{f}_n^{(1)}(z)\big|_{z\to\infty^+} \simeq z^{(n-n_0)/2}[1 + O(z^{-1})], \qquad \bar{f}_n^{(1)}(z)\big|_{z\to 0^+} \simeq (\psi_{n-1}(t)/\psi_{n_0-1}(t)) \times$$

$$\times z^{(n-n_0)/2}[1 + O(z)], \qquad \bar{f}_n^{(1)}(z)\big|_{z\to\infty^-} \simeq (\psi_n(t)/\psi_{n_0}(t))\, z^{(n-n_0)/2} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n-n_0} h_{n_0+k}[1 + O(z^{-1})], \qquad \bar{f}_n^{(1)}(z)\big|_{z\to 0^-} \simeq z^{(n-n_0)/2}\prod_{k=0}^{n-n_0} h_{n_0+k}[1 + O(z)]. \tag{16}$$

Рассматривая выражения (1) и (2) для собственной функции Блоха $\bar{f}_n^{(1)}(z)$, $z \in \Gamma_0$, $n \in \mathbb{Z}$, заключаем, что функция $\bar{g}_n^{(1)}(z) = z^{(n-n_0)/2}\bar{f}_n^{(1)}(z)$ на поверхности $\Gamma_0 \diagdown \{\infty^{\pm}, 0^{\pm}, \mu_{jn_0}, j = 1, 2, \ldots, N\}$ является аналитической по параметру $z \in \Gamma_0$, причем в точках $\infty^{\pm}, 0^{\pm} \in \Gamma_0$ и $\mu_{jn_0} \in \Gamma_0$, $j = 1, 2, \ldots N$, она имеет полюсы единичной кратности. Из (16) следует, что абелев дифференциал $\frac{d}{dz}\ln \bar{g}_n^{(1)}(z)\,dz$ на римановой поверхности Γ_0 функции $\sqrt{P_N(z)}$, $z \in \mathbb{C}^1$, имеет полюсы в точках ∞^+, ∞^-, 0^+ и 0^- с вычетами $+(n-n_0)/2$, $-(n-n_0)/2$, $-(n-n_0)/2$ и $(n-n_0)/2$ соответственно, а также полюсы в точках μ_{jn} и $\mu_{jn_0} \in \Gamma$, $j = 1, 2, \ldots, N$, с вычетами $+1$ и -1 соответственно. Используя асимптотики (16), можно записать функцию $\bar{g}_n^{(1)}(z)$, $z \in \Gamma_0$, $n \in \mathbb{Z}$, в явном виде в терминах римановых тэта-функций [10]. Находим:

$$\bar{g}_n^{(1)}(z) = \frac{\Theta(z, n)}{\Theta(z, n_0)} \left[\frac{\psi_{n-1}(t)\,\Theta(\infty^+, n_0)\,\Theta(0^+, n_0)}{\psi_{n_0-1}(t)\,\Theta(\infty^+, n)\,\Theta(0^+, n)}\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Здесь

$$\Theta(z, n) = \vartheta(\vec{\omega}(z) - \vec{e}_n), \qquad \vec{e}_n = \sum_{k=1}^{N} \vec{\omega}(\mu_{kn_0}) - \frac{1}{2}(n - n_0)(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{\gamma},$$

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^{N} b_{kj} - \frac{j}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad \vartheta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^N} \exp\{(\vec{m}, b\vec{m})\,\pi i +$$

$$+ 2\pi i(\vec{m}, \vec{u})\}, \quad \vec{u} \in \mathbb{C}^N, \qquad b = (b_{kj}), \qquad k, j = 1, 2, \ldots, N,$$

$$b_{kj} = \oint_{b_j} d\omega_k(z), \quad k, j = 1, 2, \ldots, N,$$

$d\omega_k(z)$ — базис нормированных голоморфных абелевых дифференциалов на римановой поверхности Γ_0 рода N, $b_j \subset \Gamma$, $j = 1, 2, \ldots, N$, b — базис одномерной группы гомологий $H_1(\Gamma_0)$ многообразия Γ_0;

$$U_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{b_j} d\Omega(\infty^+, \infty^-), \qquad V_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{b_j} d\Omega(0^-, 0^+),$$

где $d\Omega(\infty^+, \infty^-)$ и $d\Omega(0^-, 0^+)$ — нормированные абелевы дифференциалы третьего рода на Γ_0 соответственно с полюсами в точках ∞^+, ∞^- и 0^-, 0^+ и с вычетами $+1$, -1 и $+1$, -1 соответственно; $p(\mu_{kn_0}) \neq p(\mu_{jn_0})$, $k \neq j$, где $p: \Gamma_0 \to \mathbb{C}^1$ — естественная проекция многообразия Γ_0 на $\mathbb{C}^1$.

Используя уравнения (4) и (1), получаем представление для функции $\chi_n(\lambda) = \bar{f}_{n+1}^{(1)}(z)/\bar{f}_n^{(1)}(z)$ в виде

$$\chi_n = \frac{h_n}{2\lambda}\frac{S_{n+1}^{(12)}}{S_n^{(12)}} + \frac{\psi_n^2 S_n^{(21)}}{2\lambda S_n^{(12)}} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\psi_n \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 1}}{S_n^{(12)}}, \tag{18}$$

откуда после подстановки (см. [1])

$$S_n^{(12)} = \frac{2\psi_n}{\lambda^N} \prod_{j=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_{jn}), \qquad S_n^{(21)}(\lambda) = S_n^{(12)*}(\lambda^{*-1}), \tag{19}$$

находим $(\lambda^2 = z \in \Gamma_0)$

$$z^{1/2}\chi_n(z) = \frac{h_n \psi_{n+1}}{2} \prod_{j=1}^{N} \frac{z - \mu_{j,n+1}}{z - \mu_{j,n}} + \frac{|\psi_n|^2}{2} \prod_{j=1}^{N} \frac{1 - \mu_{jn}^* z}{z - \mu_{jn}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_N(z)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{N} (z - \mu_{jn})^{-1} + \frac{z}{2}. \tag{20}$$

Формулы (20) и (17) при разложении их в асимптотические ряды по параметру $z \to \infty^+ \in \Gamma_0$ приводят к выражениям типа «нелинейных формул следов» [10, 11] для «условных» собственных чисел $\mu_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, разлагая выражение $\chi_n(z) = \bar{f}_{n+1}^{(1)}(z)/\bar{f}_n^{(1)}(z)$, полученное из (17), в асимптотический ряд по $z \to 0^+ \in \Gamma_0$, получаем

$$z^{1/2}\chi_n(z)\,|_{z \to 0^+ \in \Gamma_0} \simeq (\psi_n(t)/\psi_{n-1}(t))\,[1 + O(z^{-1})], \tag{21}$$

откуда следует равенство

$$\psi_n(t)/\psi(t)_{n-1} = \Theta(0^+, n+1)\,\Theta(\infty^+, n)/\Theta(0^+, n)\,\Theta(\infty^+, n+1) \tag{22}$$

Из выражения (22) следует явная формула для функции $\psi_n(t)$, $n \in \in \mathbb{Z}/(N+1)$:

$$\psi_n(t) = \psi_{n_0}(t)\,\Theta(0+, n+1)\,\Theta(\infty+, n_0+1)/\Theta(\infty+, n+1)\,\Theta(0+, n_0+1) \qquad (23)$$

которая, таким образом, решает в терминах римановых тэта-функций обратную задачу для оператора (1).

5. Вычислим динамическую зависимость по параметру $t \in \mathbb{R}^1$ выражения $\vec{e}_n \in \mathbb{C}^N$, входящего в Θ-функцию Римана (17), согласно уравнению (14)

$$\partial \vec{e}_n/\partial t = \{H, \vec{e}_n\}_{\mathscr{L}}. \qquad (24)$$

Так как $\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}(\mu_{jn}) + \vec{\gamma}$, то для вычисления выражений в (24) необходимо знать производные функций μ_{jn}, $j = 1, 2, \ldots, N$,

$$\partial \mu_{jn}/\partial t = \{H, \mu_{jn}\}_{\mathscr{L}}, \qquad (25)$$

которые находим, согласно (19), из уравнения

$$\partial S_n^{(12)}/\partial t = \{H, S_n^{(12)}\}_{\mathscr{L}}. \qquad (26)$$

Выражение (26) можно вычислить явно двумя способами: при помощи уравнений (5) и (7) или при помощи выражения [7, 8]

$$\partial f_n/\partial t = \mathscr{B}_n f_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (27)$$

Здесь матрица $\mathscr{B}_n$ удовлетворяет уравнению типа Лакса [7, 11] $\partial \mathscr{A}_n/\partial t = \mathscr{B}_{n+1}\mathscr{A}_n - \mathscr{A}_n\mathscr{B}_n$ и имеет вид [6, 8]

$$\mathscr{B}_n = i\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 - \psi_{n-1}^*\psi_n & \lambda\psi_n - \lambda^{-1}\psi_{n-1} \\ \lambda\psi_{n-1}^* - \lambda^{-1}\psi_n^* & 1 - \lambda^{-2} + \psi_n^*\psi_{n-1} \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Из соотношений (2) и (27) находим дифференциальное уравнение для матрицы монодромии $S_n(\lambda)$ по переменной t [1, 2, 7, 8]

$$\partial S_n/\partial t = [\mathscr{B}_n, S_n], \qquad (29)$$

откуда получаем

$$\partial \mu_{jn}/\partial t = i\Big[-\prod_{k\neq l}\mu_{kn}^{-1} + (-1)^N\Big]\sqrt{P_N(\mu_{jn})}. \qquad (30)$$

Уравнения (30) следует рассматривать как уравнения, заданные на римановой поверхности Γ_0 функции $\sqrt{P_N(z)}$, $z \in \mathbb{C}^1$. Начальные данные $\mu_{jn_0} \in \Gamma_0$ необходимо выбирать так, чтобы тождественно выполнялись условия $q(\mu_{jn_0}) = \sqrt{P(\mu_{jn_0})}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, где $q(z)$, $Z \in \mathbb{C}^1$, — некоторый полином степени $N+1$ с комплексными коэффициентами q_k, удовлетворяющими соотношениям $q_0 = 1$, $q_k^* = q_{N+1-k}$, $k = 1, 2, \ldots, N+1$ [7].

Используя уравнения (30) и (24), находим:

$$\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{\omega}(\mu_{jn})}{\partial \mu_{jn}} \frac{\partial \mu_{jn}}{\partial t} = -i\vec{C}_{N-1} + i(-1)^{N+1}C_0. \qquad (31)$$

Здесь $d\vec{\omega}(z) = \sum_{k=1}^{N} \vec{C}_k z^{k-1}[P_N(z)]^{-1/2}dz$ — вектор-базис абелевых нормированных дифференциалов первого рода на поверхности Γ_0 [10—12]. Из (31) получаем, что динамика по переменной $t \in \mathbb{R}^1$ Θ-функций Римана (23), определяющих решение уравнения (12), определяется следующим выражением для $\vec{e}_n(t)$:

$$\vec{e}_n(t) = \vec{e}_{n_0}(t) + i[(-1)^{N+1}\vec{C}_0 - \vec{C}_{N-1}](t - t_0) - (n - n_0)(\vec{U} + \vec{V})/2, \qquad (32)$$

т. е. решение $\psi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}/(N+1)$ уравнения (14) дается формулами (23) и (32), где $t \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}$ — произвольные числа.

Аналогичным образом можно построить решение уравнения (15), в другой форме полученное в [7] на основе методов работы [13]. Отметим также, что представляет большой интерес редукция построенных решений к решениям типа «дискретных» солитонов, получаемых при вырождении римановой поверхности Γ_0 к рациональной.

1. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза.— Теор. и мат. физика, 1982, **50**, № 1, с. 118—126.
2. *Самойленко В. Г.* Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений ленгмюровской цепочки.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 3, с. 322—327.
3. *Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Динамические системы, ассоциированные с периодическим оператором Дирака и их полная интегрируемость.— Киев, 1983.— 31 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.44)
4. *Mamford D., Moerbece P.* The spectrum of difference operators and algebraic curves.— Acta Math., 1979, **143**, N 1—2, p. 93—154.
5. *Moerbece P.* About isospectral deformations of discrete Laplacian.— Lect. Notes Math., 1980, **755**, p. 313—370.
6. *Gerdjikov B. S., Ivanov M. I., Kulish P. P.* Completely integrability of difference evolution equations.— Дубна, 1980.— 20 с.— (Препринт / Объед. ин-т ядерн. исслед. ; 2—80—882)
7. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Обратная периодическая задача для дискретного приближения нелинейного уравнения Шредингера.— Докл. АН СССР, 1982, **262**, № 5, с. 1103—1108.
8. *Ablowitz M. J., Ladik J. F.* Nonlinear differential-difference equations.— J. Math. Physics, 1975, **16**, N 3, p. 598—603.
9. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри.— М. : Мир, 1983.— 408 с.— Пер. с англ.
10. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
11. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 1, с. 55—136.
12. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 1, с. 113—179.
13. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 332 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 26.11.84