УДК 511.9

А. А. Шмелев

Совместные приближения экспонент трансцендентными числами специального вида

Пусть $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, A — соответственно поле комплексных, рациональных и всех алгебраических чисел, Z — кольцо целых чисел, $Z[X_1, \ldots, X_s]$ — кольцо многочленов над Z от s переменных ($s \geqslant 1$), $\theta \in \mathbf{C}$ — произвольное трансцендентное число, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(\theta)$, $I_1 = Z[\theta]$. Полем $\mathbf{Q}_1^*$ назовем алгебраическое расширение конечной степени поля $\mathbf{Q}_1^*$.

А. О. Гельфонд [1, 2] разработал аналитический метод в теории трансцендентных чисел, с помощью которого получен ряд результатов о непринадлежности хотя бы одного из нескольких чисел, связанных с показательной функцией, полю $\mathbf{Q}_1^*$.

В настоящей работе метод Гельфонда и идеи работ [3, 7] применены к решению задачи о совместных приближениях экспонент некоторыми элементами поля $\mathbf{Q}_1^*$.

Пусть поле Q_1^* порождено числами θ и ω_1, где ω_1 — корень неприводимого над $\mathbf{Q}_1$ многочлена $x^\nu + B_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + B_1x + B_0$, $B_i \in I_1$, $i = 0, 1, \ldots, \nu - 1$; пусть $\omega_2, \ldots, \omega_\nu$ — остальные корни этого многочлена.

Если $\eta \in I_1$, $\eta = G_m\theta^m + G_{m-1}\theta^{m-1} + \ldots + G_0$, $G_i \in Z$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $G_m \neq 0$, то положим $v(\eta) = m + \ln \max |G_i| + 1$.

Для любого $\varkappa \in \mathbf{Q}_1^*$ существует и единственно представление в виде

$$\varkappa = (D_{\nu-1}\omega_1^{\nu-1} + \ldots + D_1\omega_1 + D_0)/D, \tag{1}$$

где $D, D_0, \ldots, D_{\nu-1} \in I_1$ взаимно просты в совокупности.

Если $\varkappa \in \mathbf{Q}_1^*$ задан представлением (1), то положим

$$v(\varkappa) = \max\{v(D), v(D_0), \ldots, v(D_{\nu-1})\}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать числа, представимые в форме (1), у которых $D \in I_1$ удовлетворяет условию $v(D) \leqslant c_0$ ($c_0 > 0$ — фиксированная постоянная), и обозначать множество этих чисел $\mathbf{Q}_1^*(c_0)$. Множество указанного типа образуют, в частности, целые элементы поля $\mathbf{Q}_1^*$ (см. определение в [4, гл. 17, §§ 134—136]).

Теорема. Пусть $m(d+1) > 3(m+d)$; $z_1, \ldots, z_m \in \mathbf{C}$, *так же как и* $\beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbf{C}$, *линейно независимы над* $\mathbf{Q}$ *и неравенства*

$$|k_1\beta_1 + \ldots + k_d\beta_d| > \exp(-\tau_1 k), \quad k = |k_1| + \ldots + |k_d| > 0, \tag{3}$$

$$|l_1z_1 + \ldots + l_mz_m| > \exp(-\tau_2 l), \quad l = |l_1| + \ldots + |l_m| > 0, \tag{4}$$

где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ — *постоянные, не зависящие от* k, l *выполняются при всех* $k_1, \ldots, k_d$, $l_1, \ldots, l_m \in Z$. *Пусть*

$$\varphi_i = z_i,\ i = 1, \ldots, m,\ \varphi_{km+l} = e^{\beta_k z_l}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

$$\eta_1, \ldots, \eta_{(d+1)m} \in \mathbf{Q}_1^*(c_0), \qquad W = \max\{v(\eta_1), \ldots, v(\eta_{(d+1)m})\}.$$

Тогда неравенство

$$\sum_{i=1}^{(d+1)m} |\varphi_i - \eta_i| < \exp\{-W^{3m(d+1)/2\varepsilon(m-1)} \ln^4 W\}, \quad \varepsilon = \{m(d+1) - 3(m+d)\}/3(m-1), \tag{5}$$

имеет лишь конечное число решений в $\eta_1, \ldots, \eta_{(d+1)m}$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (5) имеет бесконечное множество решений $\eta_1, \ldots, \eta_{(d+1)m}$. Положим $N = [W^{1/\varepsilon}]$, $N_1 = [N^{3/2}]$, U — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $N \leqslant U \leqslant N_1$,

$\lambda_i > 0$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — постоянные, не зависящие от N, N_1, U. Представим η_i $(1 \leqslant i \leqslant (d+1)m)$ в форме (1):

$$\eta_i = (P_{i,\nu-1}\omega_1^{\nu-1} + \ldots + P_{i,1}\omega_1 + P_{i,0})/P_i. \tag{6}$$

Положим $P_0 = P_1 \ldots P_{(d+1)m}$. Обозначим

$$\sum_{k=0}^{R}(d) = \sum_{k_1=0}^{R} \cdots \sum_{k_d=0}^{R}, \quad k = (k_1, \ldots, k_d); \qquad \prod_{l=0}^{L}(m) = \prod_{l_1=0}^{L} \cdots \prod_{l_m=0}^{L}, \quad l = (l_1, \ldots, l_m).$$

При каждом U, $N \leqslant U \leqslant N_1$, рассмотрим функцию

$$f_U(z) = \sum_{k_0=0}^{F} \sum_{k=0}^{U-1}(d)\, C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} z^{k_0} \exp((k_1\beta_1 + \ldots + k_d\beta_d)z), \quad C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} \in I_1,$$
$$F = [U^{(m+d)/(m-1)}], \tag{7}$$

где $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}}$ будут выбраны в дальнейшем.

Пусть

$$f_{U,\bar{l}} = f_U(l_1 z_1 + \ldots + l_m z_m), \quad 0 \leqslant l_i \leqslant [U^{(d+1)/(m-1)}], \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{8}$$

а числа $\Phi_{U,\bar{l}}$ получены заменой в (8) величин φ_i величинами η_i, $1 \leqslant i \leqslant (d+1)m$. Для чисел

$$\Psi_{U,\bar{l}} = P_0^F \Phi_{U,\bar{l}}, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant [U^{(d+1)/(m-1)}], \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{9}$$

имеет место представление

$$\Psi_{U,\bar{l}} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \sum_{k_0=0}^{F} \sum_{k=0}^{U-1}(d)\, C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} B_{i,k_0,\bar{k},U,\bar{l}}\, \omega_1^i, \tag{10}$$

причем $B_{i,k_0,\bar{k},U,\bar{l}}$ I_1 и справедлива оценка

$$\max v(B_{i,k_0,\bar{k},U,\bar{l}}) < \lambda_1 U^{(m+d)/(m-1)} W. \tag{11}$$

Пользуясь (11) и леммой 2 из [5], получим, что существуют $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} \in I_1$, в совокупности отличные от нуля и такие, что

$$\Psi_{U,\bar{l}} = 0, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant L_1 = [\lambda_2 U^{(d+1)/(m-1)}], \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \lambda_2 < 1, \tag{12}$$

причем

$$\max v(C^{(U)}_{k_0,\bar{k}}) < 3\lambda_1 U^{(m+d)/(m-1)} W. \tag{13}$$

Заметим. что $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} \in I_1$ можно считать взаимно простыми в совокупности многочленами от θ, ибо если существует $D_U(\theta) \in I_1$, являющийся делителем всех $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}}$, то разделив на него все $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}}$, получим $\overline{C}^{(U)}_{k_0,\bar{k}} \in I_1$ такие, что $\max v(\overline{C}^{(U)}_{k_0,\bar{k}}) < 6\lambda_1 U^{(m+d)/(m-1)} W$ (см. [2, лемма 2, с. 168]), и условия (12) остаются выполненными. Из (12) следуют соотношения

$$\Phi_{U,\bar{l}} = 0, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant L_1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{14}$$

Из (5) и (13) следует, что при $0 \leqslant l_i \leqslant [U^{(d+1)/(m-1)} \ln^4 U]$, $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$|f_{U,\bar{l}} - \Phi_{U,\bar{l}}| < \exp(-(2\varepsilon^4)^{-1} N^{3m(d+1)/(2m-2)} \ln^4 N). \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем

$$|f_{U,\bar{l}}| < \exp(-(2\varepsilon^4)^{-1} N^{3m(d+1)/(2m-2)} \ln^4 N), \quad 0 \leqslant l_i \leqslant L_1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{16}$$

Оценим, пользуясь интерполяционной формулой Эрмита, $|f_U'(z)|$ при $|z| \leqslant U^{(d+1)/(m-1)} \ln^4 U$:

$$f_U(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \prod_{l=0}^{L_1} (m) \frac{z - l_1 z_1 - \ldots - l_m z_m}{\zeta - l_1 z_1 - \ldots - l_m z_m} \frac{f_U(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{L_1} (m) f_U(k_1 z_1 + \ldots + k_m z_m) \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma_{k_1,\ldots,k_m}} \prod_{l=0}^{L_1} (m) \frac{z - l_1 z_1 - \ldots - l_m z_m}{\zeta - l_1 z_1 - \ldots - l_m z_m} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{17}$$

где Γ — окружность $|\zeta| = U^{(5d+5)/(4m-4)}$, $\Gamma_{k_1,\ldots,k_m}$ — окружность $|\zeta - k_1 z_1 - \ldots - k_m z_m| = \exp(-4\tau_2 U^{(d+1)/(m-1)})$. Далее, имеем

$$\max |f_U(z)| < \exp(-\lambda_3 U^{d+(m+d)/(m-1)} \ln U), \quad |z| \leqslant U^{(d+1)/(m-1)} \ln^4 U. \tag{18}$$

Согласно основной лемме из [6], существуют постоянные $\lambda_4 > 0$, $\lambda_5 > 0$ такие, что если

$$|f_{U,\bar{l}}| < \exp(-\lambda_4 U^{d+(m+d)/(m-1)} \ln U), \quad 0 \leqslant l_i \leqslant [\lambda_5 U^{(d+1)/(m-1)}], \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{19}$$

то

$$\max |C^{(U)}_{k_0,\bar{k}}| < \exp(-\lambda_6 U^{d+(m+d)/(m-1)} \ln U). \tag{20}$$

Ввиду того, что $C^{(U)}_{k_0,\bar{k}} \in I_1$ взаимно просты в совокупности, при $N > \lambda_7$ оценки (13) и (20), согласно лемме 2 из [3], противоречивы. Поэтому будем в дальнейшем считать, что при $N > \lambda_7$

$$\exp(-\lambda_3 U^{d+(m+d)/(m-1)} \ln U) > \max |f_{U,\bar{l}}| > \exp(-\lambda_4 U^{d+(m+d)/(m-1)} \ln U), \tag{21}$$
$$0 \leqslant l_i \leqslant L_2 = [U^{(d+1)/(m-1)} \ln^{1/(8m)} U], \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Лемма. *Пусть* α_k, $D_{r,k} \in \mathbf{C}$, $\beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbf{C}$ *линейно независимы над* $\mathbf{Q}$,

$$g(z) = \sum_{l=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{M-1} D_{l,k} z^l e^{\alpha_k z}, \quad \alpha_k = m_1\beta_1 + \ldots + m_d\beta_d, \quad m_i \in Z,$$

$$0 \leqslant m_i \leqslant L-1, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad M = L^d, \quad \alpha_{s_1} \neq \alpha_{s_2} \text{ при } s_1 \neq s_2.$$

Если при $r_i \in Z$, $1 \leqslant i \leqslant d$, *выполняется условие*

$$|r_1\beta_1 + \ldots + r_d\beta_d| > \exp(-\tau r), \quad r = |r_1| + \ldots + |r_d| > 0, \tag{22}$$

где $\tau > 0$ *— постоянная, не зависящая от* r, *то имеет место оценка*

$$\max |D_{l,k}| < \max_{|z| \leqslant M_1 L^{d-1}} |g(z)| \exp(\varkappa M M_1), \tag{23}$$

где $\varkappa > 0$ *— постоянная, не зависящая от* M, M_1.

В доказательстве леммы используются некоторые соображения из [2] и [6]. Построим многочлен $R_{p,q}(z)$ степени $M_2 = MM_1 - 1$ такой, что

$R^{(k)}_{p,q}(\alpha_i) = 0$, $(k-p)^2 + (i-q)^2 \neq 0$, $R^{(p)}_{p,q}(\alpha_q) = 1$, $k = 0, 1, \ldots, M_1 - 1$, $i =$

$= 0, 1, \ldots, M-1$. Пусть $R_{p,q}(z) = \sum_{l=0}^{M_2} C_{l,p,q} z^l$. В [2, с. 177] получено представление

$$R_{p,q}(z) = \frac{(-1)^{M_1+p}}{p!} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq q}}^{M-1} \frac{z-\alpha_i}{\alpha_q - \alpha_i} \right)^{M_1} (z-\alpha_q)^{M_1} \times$$

$$\times \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_M = M_1-p-1}' (\alpha_q - z)^{-\nu_q-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq q}}^{M-1} \frac{(M_1+\nu_l-1)!}{(M_1-1)!\, \nu_l!} (\alpha_q - \alpha_l)^{-\nu_l}. \quad (24)$$

Из (24) следует, что $R_{p,q}(z) \ll C_0 (z+\alpha)^{MM_1-1} 2^{4MM_1} e^{8\tau MM_1}$, где $\ll$ — символ мажорирования, $C_0 = \left| \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq q}}^{M-1} (\alpha_q - \alpha_i) \right|^{-M_1}$, $\alpha = L(|\beta_1| + \ldots + |\beta_d|)$.

Повторяя рассуждения из [2, с. 195], получим, что $C_0 < \exp\{4(\tau+1) \times dMM_1 - (1/d) MM_1 \ln M\}$ или

$$R_{p,q}(z) \ll C_1 (z+\alpha)^{MM_1-1}, \quad (25)$$

где

$$C_1 = \exp\{12(\tau+1) dMM_1 - (1/d) MM_1 \ln M\}. \quad (26)$$

В [2, с. 177] показано, что имеет место соотношение

$$D_{p,q} = \sum_{l=0}^{M_2} C_{l,p,q} g^{(l)}(0). \quad (27)$$

Из (27) следует оценка

$$|D_{p,q}| \leqslant \left(\max_{0 \leqslant l \leqslant M_2} R^l |g^{(l)}(0)|/l! \right) \sum_{l=0}^{M_2} l!\, |C_{l,p,q}|/R^l \quad (28)$$

при любом $R > 0$. По интегральной формуле Коши $\max_{0 \leqslant l \leqslant M_2} R^l |g^{(l)}(0)|/l! \leqslant \leqslant \max_{|z| \leqslant R} |g(z)|$.

Из (25) получаем оценку $|C_{l,p,q}| \leqslant C_1 C_{M_2}^l \alpha^{M_2-l}$, $l = 0, 1, \ldots, M_2$. Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{M_2} l!\, |C_{l,p,q}|/R^l \leqslant C_1 M_2! \sum_{l=0}^{M_2} \alpha^{M_2-l}/\{R^l (M_2-l)!\} = (C_1 M_2!/R^{M_2}) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{M_2} (\alpha R)^k/k! < C_1 M_2! \exp(\alpha R)/R^{M_2}.$$

Из (28) следует оценка $|D_{p,q}| < (C_1 M_2!/R^{M_2}) \exp\{(|\beta_1| + \ldots + |\beta_d|) LR\} \times \max_{|z| \leqslant R} |g(z)|$. Полагая $R = M_1 L^{d-1}$ и пользуясь (26), получим $|D_{p,q}| < < \exp(\varkappa MM_1) \max_{|z| \leqslant M_1 L^{d-1}} |g(z)|$, где $\varkappa$ — постоянная, не зависящая от M, M_1, что и доказывает лемму.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим числа $\Phi_{U,\bar{l}}$, $0 \leqslant l_i \leqslant L_2$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из (15) и (21) следует, что при $N > \lambda_8$

$$\exp(-(\lambda_3/2) U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U) > \max |\Phi_{U,\bar{l}}| > \exp(-2\lambda_4 U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U). \quad (29)$$

Положим

$$X_{U,\bar{l}} = P_0^{F_1} \Phi_{U,\bar{l}}, \quad F_1 = [U^{(m+d)/(m-1)} \ln^{1/(8m)} U]. \quad (30)$$

Из (7) и (13) следует, что $X_{U,\bar{l}}^{(1)}$ имеет вид $X_{U,\bar{l}}^{(1)} = \sum_{k=0}^{K} \sum_{k_1=0}^{\nu-1} C_{U,\bar{l},k,k_1} \theta^k \omega_1^{k_1}$, $C_{U,\bar{l},k,k_1} \in Z$, и удовлетворяет соотношениям

$$\exp(-(\lambda_3/4) U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U) > \max |X_{U,\bar{l}}^{(1)}| > \exp(-4\lambda_4 U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U). \tag{31}$$

Пусть $X_{U,\bar{l}}^{(r)} = \sum_{k=0}^{K} \sum_{k_1=0}^{\nu_1-1} C_{U,\bar{l},k,k_1} \theta^k \omega_r^{k_1}$, $r = 2, \ldots, \nu$. Если $X_{U,\bar{l}}^{(1)} \neq 0$, то и $X_{U,\bar{l}}^{(r)} \neq$ $\neq 0$, $r = 2, \ldots, \nu$, а $X_{U,\bar{l}} = \prod_{i=1}^{\nu} X_{U,\bar{l}}^{(i)} \in I_1$. Из (7), (13) и (30) следует, что при $0 \leqslant l_i \leqslant L_2$, $1 \leqslant i \leqslant m$

$$v(X_{U,\bar{l}}) < \lambda_9 U^{(m+d)/(m-1)} W \ln^{1/(8m)} U. \tag{32}$$

Так как

$$|X_{U,\bar{l}}^{(k)}| < \exp(\lambda_{10} U^{(m+d)/(m-1)} W \ln^{1/(8m)} U), \tag{33}$$

то из (33) и (31) следует оценка

$$|X_{U,\bar{l}}| < \exp(-(\lambda_3/8) U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U). \tag{34}$$

По лемме 6 из [2, с. 183] существует $Y_{U,\bar{l}} \in I_1$ — делитель $X_{U,\bar{l}}$, являющийся степенью неприводимого над $\mathbf{Q}$ многочлена от θ, такой, что

$$|Y_{U,\bar{l}}| < \exp(-(\lambda_3/24) U^{m(d+1)/(m-1)} \ln U), \quad N > \lambda_{11}, \tag{35}$$

$$v(Y_{U,\bar{l}}) < 3\lambda_9 U^{(m+d)/(m-1)} W \ln^{1/(8m)} U. \tag{36}$$

Если при каком-либо U среди чисел $Y_{U,\bar{l}}$ имеются степени двух различных неприводимых многочленов, то по лемме 5 из [2, с. 181] оценки (35) и (36) противоречивы.

Рассмотрим совокупность чисел (35) при всех U, $N \leqslant U \leqslant N_1$. Если среди этой совокупности найдутся $Y_{U_1,\bar{l}_1}$, $Y_{U_2,\bar{l}_2}$ — степени различных неприводимых многочленов, то неравенства

$$\max\{|Y_{U_1,\bar{l}_1}|, |Y_{U_2,\bar{l}_2}|\} < \exp(-(\lambda_3/24) N^{m(d+1)/(m-1)} \ln N),$$

$$\max\{v(Y_{U_1,\bar{l}_1}), v(Y_{U_2,\bar{l}_2})\} < 6\lambda_9 N^{3(m+d)/(2m-2)+\varepsilon} \ln^{1/(8m)} N, \tag{37}$$

по лемме 5 из [2, с. 181], противоречивы.

Таким образом, при всех U, $N \leqslant U \leqslant N_1$, $N > \lambda_{11}$, многочлены (35) суть степени неприводимого многочлена $q_N \in I_1$. При $U = N_1$ имеют место оценки

$$\max|Y_{N_1,\bar{l}}| < \exp(-(\lambda_3/24) N^{3m(d+1)/(2m-2)} \ln N), \quad \max v(Y_{N_1,\bar{l}}) <$$

$$< 6\lambda_9 N^{3(m+d)/(2m-2)+\varepsilon} \ln^{1/(8m)} N, \tag{38}$$

откуда следует неравенство

$$\ln|q_N| < -\lambda_{12} N^{m(d+1)/(m-1)+\varepsilon/2} \ln^{1-1/(8m)} N, \tag{39}$$

причем

$$v(q_N) < 6\lambda_9 N^{(m+d)/(m-1)+\varepsilon} \ln^{1/(8m)} N. \tag{40}$$

Из (31) следует, что среди чисел $X_{N_1\bar{l}}^{(1)}$ хотя бы одно отлично от нуля. Выберем $\bar{l}_0$ так, чтобы $|X_{N,\bar{l}_0}^{(1)}| = \max|X_{N_1\bar{l}}^{(1)}|$. Положим $w = X_{N,\bar{l}_0}^{(1)} = G_{N,0} + G_{N,1}\omega_1 + \ldots + G_{N,\nu-1}\omega_1^{\nu-1}$, $G_{N,i} \in I_1$, $0 \leqslant i \leqslant \nu - 1$. Из (30) следует, что имеют место оценки

$$v(G_{N,i}) < \lambda_{13} N^{(m+d)/(m-1)+\varepsilon} \ln^{1/(8m)} N. \tag{41}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $G_{N,0} \neq 0$, ибо если $G_{N,0}, \ldots, G_{N,k}$, $k < \nu - 1$, равны нулю, то вместо w можно рассмотреть $\omega_1^{-k-1} w$. Пусть d_1 — степень поля $\mathbf{Q}_1(\omega_1, \ldots, \omega_\nu)$ относительно $\mathbf{Q}_1$, $w = w^{(1)}$, числа $w^{(2)}, \ldots, w^{(d_1)}$ — сопряженные с $w^{(1)}$. Число $w_0 = w^{(1)} \ldots w^{(d_1)}$ принадлежит I_1, причем имеют место оценки

$$\ln|w_0| < -(\lambda_3/16)\, N^{m(d+1)/(m-1)} \ln N, \quad v(w_0) < \lambda_{14} N^{(m+d)/(m-1)+\varepsilon} \ln^{1/(8m)} N. \tag{42}$$

Из оценок (39), (40), (42) и леммы 5 из [2, с. 181] следует, что w_0 делится на q_N, и поэтому имеет место оценка

$$\ln|w_0| < -(\lambda_{12}/2)\, N^{m(d+1)/(m-1)+\varepsilon/2} \ln^{1-1/(8m)} N, \tag{43}$$

откуда находим, что при некотором l, $2 \leqslant l \leqslant d_1$,

$$\ln|w^{(l)}| < -(\lambda_{12}/2d_1)\, N^{m(d+1)/(m-1)+\varepsilon/2} \ln^{1-1/(8m)} N, \tag{44}$$

причем $w^{(l)} \neq w^{(1)}$, так как при $N > \lambda_{15}$ нижняя оценка (21) и оценка (44) противоречивы. Повторяя рассуждения, приведенные в [7, с. 774], получим

$$\exp(-\lambda_3/(2d_1)^{d_1} N^{m(d+1)/(m-1)} \ln N) > |G_{N,0}| > \exp(-4^{d_1} \lambda_4 N^{m(d+1)/(m-1)} \ln N). \tag{45}$$

Нижняя оценка (45) показывает, что $G_{N,0}$ не делится на q_N, а из верхней оценки (45) и оценок (39), (40), (42) следует, что $G_{N,0}$ делится на q_N. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим, что результат, аналогичный доказанной выше теореме, может быть получен для случая, когда знаменатели приближающих элементов в представлении (6) являются произведениями степеней фиксированных неприводимых многочленов из I_1.

1. *Гельфонд А. О.* Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов.— Успехи мат. наук, 1949, 4, вып. 5, с. 14—48.
2. *Гельфонд А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа.— М. : Гостехиздат, 1952.— 224 с.
3. *Шмелев А. А.* Совместные приближения экспонент многочленами от заданного трансцендентного числа.— Укр. мат. журн., 1975, 27, №. 4, с. 555—563.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М. : Наука, 1976.— 648 с.
5. *Шмелев А. А.* К вопросу об алгебраической независимости экспонент.— Мат. заметки, 1975, 17, № 3, с. 407—418.
6. *Tijdeman R.* An auxiliary result in the theory of transcendental numbers.— J. Number Theory, 1973, 5, N 1, p. 80—94.
7. *Шмелев А. А.* Аналог теоремы Браунуэлла — Вальдшмидта о трансцендентных числах.— Мат. заметки, 1982, 32, № 6, с. 765—775.

ВНИИ сов. законодательства, Москва

Поступила 10.03.83