УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Об ограниченных относительно части переменных решениях систем дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $dz_i/dt = F_i(t, z_1, \ldots, z_s)$, $i = 1, \ldots, s$, или в векторной форме

$$dz/dt = F(t, z). \tag{1}$$

Исследуем вопрос об ограниченности решения уравнения (1) по части переменных.

Обозначим $x_i = z_i$, $i = \overline{1, m}$, $y_j = z_{m+j}$, $j = \overline{1, s-m}$, и исследуем ограниченность решения $z = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$, $n > 0$, $s - m = n$.

По аналогии с определением y-устойчивости решения [1, 2] решение $z(t)$ уравнения (1), ограниченное по переменным $z_{m+1}, \ldots, z_n$, будем называть y-ограниченным решением.

В [2] приведен обзор результатов по устойчивости решений систем дифференциальных уравнений относительно части переменных. Известны фундаментальные исследования по теории ограниченных на всей оси решений [3—10]. Что касается исследований решений, ограниченных по части переменных, то обзор работ по этому направлению отсутствует, и мы можем указать лишь на некоторые работы, относящиеся к этому вопросу [11—13].

Исследование ограниченных на всей оси $\mathbb{R}$ по части переменных решений тесно связано с вопросом существования ограниченных на всей оси $\mathbb{R}$ интегральных многообразий для некоторых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений.

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия существования y-ограниченного решения уравнения (1) как предела некоторой последовательности приближенных решений, выделен класс систем, для которых указан способ построения такой последовательности и сформулированы достаточные условия ее сходимости к искомому решению.

2. Приведем определение приближенного с невязкой решения [14, 15].

Пусть в уравнении (1) вектор-функция $F(t, z)$ определена и непрерывна на множестве $I \times W$, где интервал $I \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, W — некоторая область s-мерного нормированного пространства $\mathbb{R}^s$.

Определение 1. *Пусть дана непрерывная на интервале $I' \subset I$ со значениями в W вектор-функция $a(t)$.*

Непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию $z(t)$ будем называть приближенным с невязкой $a(t)$ решением уравнения (1) *на интервале I', если*

$$1.\ (t, z(t)) \in I' \times W; \quad 2.\ dz(t)/dt \equiv F(t, z(t)) + a(t), \quad t \in I'. \tag{2}$$

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать последовательности, равномерно сходящиеся на каждом компактном интервале $T \subset I$, введем в рассмотрение счетно-нормированное пространство $C(I)$ функций $z(t)$, определенных и непрерывных на I со значениями в $\mathbb{R}^s$ с топологией почти равномерной сходимости [16].

Предположим вначале, что для уравнения (1) существует последовательность функций

$$z_1(t),\ z_2(t),\ \ldots,\ z_n(t),\ \ldots, \tag{3}$$

в которой k-й член является приближенным решением с невязкой $a_k(t)$ на I уравнения (1). Необходимое условие сходимости в $C(I)$ этой последовательности к решению уравнения (1) формулирует следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть относительно уравнения* (1) *выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $F(t, z)$ *определена и непрерывна на множестве* $I \times W$ *и уравнение* (1) *имеет на* I *решение* $z(t)$;

2) *последовательность приближенных решений* (3) *сходится в* $C(I)$ *к решению* $z(t)$: $\|z_k(t) - z(t)\|_p \to 0, \quad k \to \infty, \quad p = 1, 2, \ldots$.

Тогда последовательность интегралов от соответствующих невязок сходится в $C(I)$ *к нулю:*

$$\left\| \int_{t_0}^{t} a_k(s)\, ds \right\|_p \to 0, \qquad k \to \infty, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Доказательство. Из соотношения (2) вытекает равенство

$$\int_{t_0}^{t} a_k(s)\, ds = z_k(t) - z_k(t_0) - \int_{t_0}^{t} F(s, z_k(s))\, ds.$$

Поскольку $F(t, z)$ непрерывна на $I \times W$, а последовательность (3) сходится в $C(I)$, то в правой части этого равенства можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$z_k(t) - z_k(t_0) - \int_{t_0}^{t} F(s, z_k(s))\, ds \to z(t) - z(t_0) - \int_{t_0}^{t} F(s, z(s))\, ds$$

при $k \to \infty$ в $C(I)$. Так как $z(t)$ — решение уравнения (1), то правая часть этого соотношения тождественно равна нулю. Следовательно, выполняется соотношение (4), что и требовалось доказать.

Замечание 1. Отметим два условия, при выполнении которых справедливо соотношение (4): а) $a_k(t) \rightrightarrows 0$, $k \to \infty$ на I; б) $\|a_k(t)\|_p \to 0$, $k \to \infty$ в $C(I)$. Однако из выполнения соотношения (4) не следует выполнение условия а) или б). Например, если $a_k(t) = \cos kt$, то соотношение (4) выполняется, а условия а) или б) не выполняются.

Замечание 2. Заметим, что при выполнении условия а) k-й член последовательности (3) является μ_k-приближенным решением на I уравнения (1), причем $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$.

При выполнении условия б) k-й член последовательности (3) является $\mu_k(t)$-приближенным решением на I уравнения (1), причем $\mu_k(t) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$ на каждом компактном интервале $T \subset I$, т. е. $\mu_k(t) \to 0$ в $C(I)$.

Условия сходимости в $C(I)$ последовательности приближенных решений к решению уравнения (1), полученные в теореме 1, являются лишь необходимыми. Для установления достаточных условий сходимости сформулируем две леммы.

Лемма 1. *Пусть относительно уравнения* (1) *выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $F(t, z)$ *определена и непрерывна на* $I \times W$;

2) *существует последовательность приближенных решений* (3), *сходящаяся в* $C(I)$:

$$\|z_k(t) - z(t)\|_p \to 0, \qquad k \to \infty; \tag{5}$$

3) *последовательность соответствующих невязок* $a_k(t)$ *удовлетворяет соотношению* (4).

Тогда последовательность (3) *сходится на* I *к некоторой функции* $z(t)$. *При этом если предельная функция* $z(t)$ *принимает значения в области* W, *то она представляет решение уравнения* (1).

Доказательство. Согласно определению 1 $dz_k(t)/dt = F(t, z_k(t)) + a_k(t)$. Отсюда находим

$$z_k(t) = z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, z_k(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} a_k(s)\, ds. \tag{6}$$

Исходя из тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 1, в правой части этого равенства можно перейти к пределу под знаком первого интеграла:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t} F(s,\ z_k(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} F(s,\ z(s))\,ds$$

в $C(I)$. Принимая также во внимание условия 2) и 3) теоремы 1, из (6) получаем соотношение

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s,\ z(s))\,ds,\quad t\in I. \tag{7}$$

Если предельная функция $z(t)$ принимает значения в области W, то из (7) следует, что эта функция является решением уравнения (1).

Лемма 2. *Пусть вектор-функция $F(t, z)$ непрерывна по t, а по z удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F(t, z') - F(t, z'')\| \leqslant \mathscr{L}(t)\,\|z' - z''\|, \tag{8}$$

где $\mathscr{L}(t)$ — положительная числовая функция, определенная и непрерывная на I; z', z'' — произвольные точки множества W.

Тогда для двух приближенных решений $z_i(t)$, $z_j(t)$ с невязками $a_i(t)$, $a_j(t)$ уравнения (1) *имеет место неравенство*

$$\|z_i(t) - z_j(t)\| \leqslant \|z_i(t_0) - z_j(t_0)\|\,\Phi(t) + \left\|\int_{t_0}^{t}[a_i(s) - a_j(s)]\,ds\right\| +$$

$$+\left|\int_{t_0}^{t}\mathscr{L}(s)\exp\left|\int_{s}^{t}\mathscr{L}(\tau)\,d\tau\right|\left\|\int_{t_0}^{s}[a_i(\tau) - a_j(\tau)]\,d\tau\right\|ds\right|, \tag{9}$$

где

$$\Phi(t) = 1 + \left|\int_{t_0}^{t}\mathscr{L}(s)\exp\left|\int_{s}^{t}\mathscr{L}(\tau)\,d\tau\right|ds\right|,\quad t\in I.$$

Доказательство леммы основано на использовании определения 1 и применении леммы Гронуолла.

3. Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости в $C(I)$ последовательности (3) к решению $z(t)$ уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются следующие условия:*

1) *функция $F(t, z)$ определена и непрерывна на $I \times W$ и, кроме того, удовлетворяет по z условию Липшица* (8);

2) *существует последовательность приближенных решений* (3), *сходящаяся при $t = t_0$: $z_k(t_0) \to z_0$, $k\to\infty$, $z_0 \in W$;*

3) *последовательность интегралов от соответствующих невязок $a_k(t)$ удовлетворяет соотношению вида* (4).

Тогда последовательность приближенных решений $z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится на I к некоторой функции $z(t)$, принимающей значение z_0 при $t = t_0$; при этом если предельная функция $z(t)$ принимает значения в области W, то она является решением уравнения (1).

Доказательство. Из неравенства (9) для произвольного отрезка $T \subset I$ находим:

$$\|z_i(t) - z_j(t)\| \leqslant C_1\|z_i(t_0) - z_j(t_0)\| + C_2\left[\left\|\int_{t_0}^{t} a_i(s)\,ds\right\| + \left\|\int_{t_0}^{t} a_j(s)\,ds\right\|\right],$$

$t\in T$, где C_1, C_2 не зависят от i, j, а зависят только от постоянной Липшица и длины интервала T. Из этого неравенства в силу условий 2) и 3) теоремы следует, что последовательность (3) является последовательностью Коши по норме равномерной сходимости. Следовательно, она равномерно сходится на T: $z_k(t) \rightrightarrows z(t)$, $k\to\infty$.

В силу произвольности компактного интервала T отсюда вытекает, что последовательность (3) сходится в $C(I)$. При этом если предельная функция $z(t)$ принимает значения в области W, то она является решением уравнения (1), принимающим при $t = t_0$ значение $z(t_0) = z_0$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Если область W замкнута или совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^s$, то при выполнении условий 1)—3) теоремы последовательность (3) сходится к решению $z(t)$ уравнения (1).

Применим теорему 2 для установления достаточных условий существования решения системы уравнений

$$dx/dt = f(t, x, y), \quad dy/dt = g(t, x, y), \tag{10}$$

где x — m-вектор, y — n-вектор $(m + n = s)$ ограниченного по компоненте y.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений* (10) *выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функции* $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ *определены на множестве*

$$I \times U \times V_\rho, \tag{11}$$

где $I \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, V_ρ — *шар радиуса* ρ *с центром в точке* $y = 0$, *область* $U \subset \mathbb{R}^m$, *непрерывны и удовлетворяют по* x, y $(K(t), \mathscr{L}(t))$-*условию Липшица:*

$$\|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')\| \leqslant K(t)(\|x' - x''\| + \|y' - y''\|),$$
$$\|g(t, x', y') - g(t, x'', y'')\| \leqslant \mathscr{L}(t)(\|x' - x''\| + \|y' - y''\|),$$

где $K(t)$, $\mathscr{L}(t)$ *определены и непрерывны на* I;

2) *существует на* I *последовательность приближенных решений*

$$x_k(t), \quad y_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

системы уравнений (10), *сходящаяся при некотором* $t = t_0 \in I$: $x_k(t_0) \to x_0$, $y_k(t_0) \to y_0$, $k \to \infty$, $x_0 \in U$, $y_0 \in V_\rho$;

3) *последовательность интегралов от соответствующих невязок* $b_k(t), c_k(t)$ *удовлетворяет соотношениям* $\int\limits_{t_0}^{t} b_k(s)\,ds \to 0$, $\int\limits_{t_0}^{t} c_k(s)\,ds \to 0$, $k \to \infty$, *в* $C(I)$.

Тогда последовательность (12) *сходится на* I *к функциям* $x(t)$, $y(t)$, *принимающим при* $t = t_0$ *значения* $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, *при этом если предельная функция* $x(t)$ *принимает значения в области* U, *то функции* $x(t)$, $y(t)$ *являются решением системы уравнений* (10), *ограниченным по компоненте* y.

Доказательство. Введя обозначения

$$z = (x, y), \quad F = (f, g), \quad W = U \times V_\rho, \tag{13}$$

запишем систему уравнений (10) в виде уравнения

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z), \tag{14}$$

в котором вектор-функция $F(t, z)$ определена и непрерывна на множестве $I \times W$. Легко видеть, что при выполнении условий теоремы 3 к уравнению (14) можно применить теорему 2. Отсюда, учитывая обозначения (13), делаем вывод, что последовательность приближенных решений (12) сходится на I к функциям $x(t)$, $y(t)$, при этом если предельная функция $y(t)$ принимает значения в V_ρ, то функции $x(t)$, $y(t)$ являются решением системы уравнений (10), ограниченным по компоненте y. Теорема доказана.

4. Теорема 3 носит общий характер в том смысле, что она не связана с определенным методом построения ограниченных по части переменных решений. Эта теорема устанавливает условия, при выполнении которых существует решение системы (10), ограниченное по части переменных в предположении, что существует некоторая последовательность приближенных решений. В связи с этим возникает задача: установить условия существования последовательностей приближенных решений систем вида (10) и разработать методы построения этих последовательностей. Теорема 3 может быть применена для обоснования методов построения ограниченных по части переменных решений таких систем.

В настоящем пункте мы рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dy}{dt} = A(t, x)\, y + h(t, x, y), \tag{15}$$

которая является частным случаем системы вида (10).

Для построения последовательности приближенных решений этой системы мы применим один вариант метода последовательных приближений и установим условия сходимости этой последовательности к решению, ограниченному по компоненте y.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть относительно системы* (15) *выполняются условия:*

1) *вектор-функции $f(t, x)$, $h(t, x, y)$ и матрица $A(t, x)$ определены и непрерывны на множестве* (11); *$h(t, x, y)$ удовлетворяет по y условию Липшица*

$$\| h(t, x, y) - h(t, x, \bar{y})\| \leqslant \mathscr{L}(t, x, \rho)\| y - \bar{y}\|$$

и, кроме того, $\| h(t, x, 0)\| \leqslant M(t, x)$, где $\mathscr{L}(t, x, \rho)$, $M(t, x)$ — некоторые непрерывные функции, определенные на множестве $I \times U$, причем функция $\mathscr{L}$ зависит от ρ как от параметра;

2) *уравнение $dx/dt = f(t, x)$ имеет на I решение $x = x(t)$;*

3) *уравнение*

$$dy/dt = A(t, x(t))\, y \tag{16}$$

имеет функцию Грина $G(t, s)$;

4) *функции $L(t, x, \rho)$, $M(t, x)$, $G(t, s)$ при $x = x(t)$ связаны соотношениями*

$$\int_I \| G(t, s)\| \mathscr{L}(s, x(s), \rho)\, ds \leqslant q(\rho), \int_I \| G(t, s)\| M(s, x(s))\, ds \leqslant q_0,$$

где положительные постоянные q_0 и $q(\rho)$ подчинены оценкам $0 \leqslant q(\rho) < 1$, $q(\rho)\rho + q_0 \leqslant \rho$.

Тогда существует последовательность

$$y_0(t) = 0, \quad y_{k+1}(t) = \int_I G(t, s)\, h(s, x(s), y_k(s))\, ds, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

равномерно сходящаяся на I к некоторой функции $y(t)$; при этом если предельная функция $y(t)$ принимает значения в области V_ρ, то функции $x(t)$, $y(t)$ определяют решение на I системы (14), *ограниченное по компоненте y:*

$$\| y(t)\| \leqslant \rho. \tag{18}$$

Доказательство. Покажем, что члены последовательности (17) удовлетворяют оценке

$$\| y_k(t)\| \leqslant \rho. \tag{19}$$

Очевидно, оценка (19) верна для $k = 0$. Предположим, что она верна для некоторого k, и покажем, что тогда она будет верна и для $k + 1$. Согласно условиям 1) и 3)

$$\| y_{k+1}(t)\| \leqslant \int_I \| G(t, s)\| \| h(s, x(s), y_k(s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_I \| G(t, s)\| (\mathscr{L}(s, x(s), \rho) + M(s, x(s)))\, ds.$$

Отсюда в силу условия 4) получаем $\| y_{k+1}\ (t)_k\| \leqslant q(\rho)\rho + q_0 \leqslant \rho$. Таким образом, последовательность (17) существует для всех $t \in I$ и ее члены ограничены по норме постоянной ρ.

Установим равномерную сходимость последовательности (17). Для этого оценим норму разности $y_{k+1}(t) - y_k(t)$. Имеем

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) = \int_I G(t, s)[h(s, x(s), y_k(s)) - h(s, x(s), y_{k-1}(s))]\, ds.$$

В силу условий 1), 3) и 4) теоремы 4 получаем

$$\| y_{k+1}(t) - y_k(t)\| \leqslant \int_I \| G(t, s)\| \mathscr{L}(s, x(s), \rho)\, \|y_k(s) - y_{k-1}(s)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in I} \| y_k(t) - y_{k-1}(t)\| \int_I \| G(t, s)\| \mathscr{L}(s, x(s), \rho)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant q(\rho) \sup_{t\in I} \| y_k(t) - y_{k-1}(t)\|.$$

Отсюда приходим к выводу, что последовательность (17) равномерно сходится на интервале I к некоторой функции $y(t)$, удовлетворяющей условию (18).

Так как вектор-функция $h(t, x, y)$ непрерывна и последовательность (17) сходится равномерно к функции $y(t)$ со значениями в V_ρ то в правой части (17) можно перейти к пределу. В результате получим тождество $y(t) \equiv \int_I G(t, s)\, h(s, x(s), y(s))\, ds$. Дифференцируя это тождество по t, убеждаемся, что $y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dt} = A(t, x(t))\, y + h(t, x(t), y)$. Теорема 4 доказана.

Как следствие теоремы 4 имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 5. *Пусть относительно системы уравнений* (15) *выполняются условия* 1)—3) *теоремы* 4, *причем функции* $\mathscr{L}$ *и* M *постоянные*; *пусть, кроме того, выполняются следующие условия*:

4) *функция Грина* $G(t, s)$ *уравнения* (16) *удовлетворяет оценке* $\| G(t, s)\| \leqslant N e^{-\nu|t-s|}$, $N > 0$, $\nu > 0$, $t, s \in I$;

5) *постоянные* $\mathscr{L}$, M, N, ν *и* ρ *связаны соотношениями* $2N\mathscr{L} < \nu$, $2MN \leqslant \rho(\nu - 2N\mathscr{L})$.

Тогда имеет место утверждение теоремы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как условия 1)—3) теорем 4 и 5 совпадают, го достаточно доказать, что из условий 4), 5) теоремы 5 вытекает справедливость условия 4) теоремы 4.

Действительно, используя условие 4), находим:

$$\int_I \| G(t, s)\| \mathscr{L}(s, x(s), \rho)\, ds \leqslant N \int_I e^{-\nu|t-s|} \mathscr{L} ds \leqslant 2N\mathscr{L}/\nu,$$

$$\int_I \| G(t, s)\| M(s, x(s))\, ds \leqslant N \int e^{-\nu|t-s|} M ds \leqslant 2NM/\nu.$$

Положим $q(\rho) = 2N\mathscr{L}/\nu$; $q_0 = 2NM/\nu$. Тогда, принимая во внимание условие 5), получаем $q(\rho) = 2N\mathscr{L}/\nu < 1$; $2N\mathscr{L}\rho/\nu + 2NM/\nu < \rho$. Таким образом, условие 4) теоремы 4 также выполняется. Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Если выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, вектор-функции $f(t, x)$, $h(t, x, y)$ удовлетворяют по x, y $(K(t), \ell(t, x))$-условию Липшица и $A(t, x)$ — ограниченная матрица, доказательство теоремы 4 можно свести к проверке выполнения условий теоремы 3.

Аналогичное замечание справедливо и для теоремы 5.

З а м е ч а н и е 5. В полученных результатах конечномерность пространств, в которых рассматриваются дифференциальные уравнения, не играет существенной роли. Все доказанные утверждения нетрудно обобщить на случай дифференциальных уравнений в произвольных банаховых пространствах.

Приведем пример системы дифференциальных уравнений, иллюстрирующий, что условия теоремы 4 являются достаточными условиями существования решений, ограниченных по части переменных.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 2t(x+\mu^2) - 2e^{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -y + \mu(y^2 + xe^{-2t^2}), \tag{20}$$

определенную для

$$t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \|y\| \leqslant \rho, \quad \mu \geqslant 0, \quad \rho \geqslant 0. \tag{21}$$

Покажем, что для этой системы выполняются все условия теоремы 5. Действительно, функции, стоящие в правой части системы (20), непрерывны в области (21) и удовлетворяют условиям $|h(t, x, 0)| \leqslant M(t, x)$, $|h(t, x, y) - h(t, x, \bar{y})| \leqslant \mathscr{L}(t, x, \rho)|y - \bar{y}|$, где $M(t, x) = \mu|x|e^{-2t^2}$, $\mathscr{L}(t, x, \rho) = 2\mu\rho$.

Первое уравнение системы (20) имеет на $\mathbb{R}$ решение

$$x = x_t = e^{t^2}(1-2t) - \mu^2. \tag{22}$$

Уравнение $dy/dt = -y$ имеет функцию Грина

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{s-t}, & t > s \\ 0, & t < s. \end{cases}$$

Следовательно, условия 1), 2) и 3) теоремы 4 выполняются.

Остается проверить выполнение условия 4) теоремы 4. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |G(t, s)| \mathscr{L}(s, x(s), \rho)\, ds \leqslant \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} 2\mu\rho\, ds = 2\mu\rho e^{-t} e^{s} \Big|_{-\infty}^{t} = 2\mu\rho;$$

$$\int_{\mathbb{R}} |G(t, s)|\, M(s, x(s))\, ds \leqslant \mu \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} e^{-2s^2} [e^{s^2}|1-2s| + \mu^2]\, ds =$$

$$= \mu e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{s} [2e^{-1/4} + \mu^2]\, ds = 2\mu e^{-1/4} + \mu^3.$$

Отсюда следует $q = 2\mu\rho$, $q_0 = 2\mu + \mu^3$. Таким образом, условие 4) теоремы 4 выполняется, если параметры μ и ρ связаны неравенствами $2\mu\rho < 1$, $2\mu\rho^2 + 2\mu + \mu^3 \leqslant \rho$, $\mu \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$. Поскольку первое неравенство является следствием второго, то достаточно ограничиться рассмотрением только второго неравенства

$$2\mu\rho^2 + 2\mu + \mu^3 \leqslant \rho, \quad \mu \geqslant 0, \quad \rho \geqslant 0. \tag{23}$$

Так как из (23) следует, что $2\mu < \rho$, то неравенство (23) заведомо будет выполняться, если выполняется неравенство $2\mu\rho^2 + 2\mu + \mu\rho^2/4 \leqslant \rho$ или

$$\mu \leqslant 4\rho/(9\rho^2 + 8). \tag{24}$$

Таким образом, если параметры μ и ρ связаны соотношением (24), то все условия теоремы 4 будут выполняться и, следовательно, система (20) будет иметь решение, ограниченное по компоненте y. Легко проверить, что таким решением будет

$$x = e^{t^2}(1-2t) - \mu^2, \quad y = \mu e^{-t^2}. \tag{25}$$

Из выражений (25) видно, что ограниченное по части переменных решение существует при более слабом, чем (24), условии $\mu \leqslant \rho$. Это объясняется тем, что неравенство (24) мы получили, огрубив соответствующие оценки, а также тем, что условия теоремы 4 являются достаточными, но не необходимыми.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М., Л. : Гостехиздат, 1950.— 475 с.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных.— Прикл. мат. и мех., 1972, **36**, вып. 2, с. 364—384.
3. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen.— Math. Is., 1930, **32**, S. 703—728.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 719 с.
5. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, **90**, с. 1—210.
6. *Майзель Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.— Тр. Уральск. политехн. ин-та. Математика, вып. 51. Свердловск, 1954, с. 20—50.
7. *Massera J. L., Schäffer S. S.* Linear differential equations and functional analysis.— J. Ann. Math., 1958, **67**, N 3, p. 517—573.
8. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений.— В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1977, с. 168—173.
9. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1977.— 303 с.
10. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
11. *Shoichi Sc., Mini K., Masamichi A.* On partial boundedness of solutions of a system ordinary differential equations.— Res. Repts. Anita Techn. Coll, 1981, N 16, p. 118—121.
12. *Mariella C. B.* Criteria di limitafezza per la soluzioni di una classe di sistemi di due equazioni differenziali del primo ordine.— Matematiche, 1975 (1976), **30**, N 2, p. 281—299.
13. *Soltés Pavel.* On the boundedness of a solution of a system of nonlinear differential equations.— Arch. Mat., 1976, **12**, N 1, p. 25—29.
14. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— 2-е изд.— М., Л. : Гостехиздат, 1949.— 550 с.
15. *Васильева А. Б., Тихонов А. Н., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1980.— 231 с.
16. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций : Секвенционный подход.— М. : Мир, 1976.— 311 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 03.06.84