УДК 517.5

И. А. Шевчук

О свойствах многочленных ядер Дзядыка

В уточненном виде доказывается анонсированная автором в [1] лемма 1.

Зафиксируем допустимый континуум $\mathfrak{M}$ со спрямляемой границей $\partial\mathfrak{M}$ (см. [2, с. 347—350]) и натуральные числа r, m, k. Обозначим $d = \operatorname{diam}\mathfrak{M}$. При всех $i = 0, 1, \ldots$ обозначим $\mathcal{P}_i$ — класс алгебраических многочленов $p(z)$ степени не выше i. При $i < 0$ запись $p(z) \in \mathcal{P}_i$ будет означать, что $p(z) \equiv 0$. Через c обозначены, вообще говоря, различные постоянные, которые зависят только от r, m, k и q и, следовательно, не зависят от точек $\zeta \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{M}$, чисел $n \in N$ и континуума $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Для последовательности* $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$ (*где* $n = 2, 3, \ldots$, $\zeta \in \partial\mathfrak{M}$, $z \in \mathbb{C}$) *многочленных ядер Дзядыка* [2, с. 429], *построенных для* $\mathfrak{M}$, *при каждых* $q = 0, 1, \ldots$ *и* $p = 0, 1, \ldots$ *имеют место соотношения:*

$$\frac{1}{p!\,2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}(\zeta - z)^q\,\frac{\partial^p}{\partial z^p}K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\,d\zeta = \delta_{q,p} + p(z), \tag{1}$$

в которых $p(z) = p(z, \mathfrak{M}, p, q, r, m, k, n) \in \mathcal{P}_{q-p}$ — *многочлены, удовлетворяющие при* $z \in \mathfrak{M}$ *условиям*

$$|p(z)| \leqslant c d^{q-p} n^{-km}, \tag{2}$$

$\delta_{q,p}$ — *символ Кронеккера.*

Лемма 1 при $q = 0$ получена В. К. Дзядыком (см., напр., [2, с. 430]). При $p = 0$, $q \neq 0$ эта лемма доказана в [3, 4], в несколько менее точном виде; при $p = 1$, $q = 1$ в [5].

Доказательство. Учитывая справедливость этой леммы для $q = 0$, доказательство проведем по индукции по q. Предположим, что лемма верна для чисел $0, 1, \ldots, q - 1$ и докажем ее для числа q. Для этого воспользуемся представлением

$$\frac{1}{p!\,2\pi i}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}(\zeta - z)^q\,\frac{\partial^p}{\partial z^p}K(\zeta, z)\,d\zeta = \frac{1}{p!\,2\pi i}\,\frac{d^p}{dz^p}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}(\zeta - z)^q K(\zeta, z)\,d\zeta -$$

$$- \frac{1}{p!\,2\pi i}\sum_{s=0}^{p-1}\binom{p}{s}\int\limits_{\partial\mathfrak{M}}\frac{\partial^{p-s}}{\partial z^{p-s}}(\zeta - z)^q\,\frac{\partial^s}{\partial z^s}K(\zeta, z)\,d\zeta = J_1(z) + J_2(z),$$

где $K(\zeta, z) = K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$. По предположению индукции имеем:

$$J_2(z) = -\frac{1}{p!}\sum_{s=0}^{p-1}\left(\frac{p}{s}\right)(-1)^{p-s}\,p!\,\delta_{q,p} + p^*(z) = \delta_{q,p} + p^*(z),$$

где $p^*(z) \in \mathcal{P}_{q-p}$ — многочлен, удовлетворяющий при всех $z \in \mathfrak{M}$ условию $|p^*(z)| \leqslant c d^{q-p} n^{-km}$.

Таким, образом, осталось доказать, что $J_1(z) \in \mathcal{P}_{q-p}$ и что при всех $z \in \mathfrak{M}$ имеет место оценка

$$|J_1(z)| \leqslant c d^{q-p} n^{-km}. \tag{3}$$

Доказательство этой оценки разобьем на четыре пункта.

1°. Установим несколько простых соотношений для фукнции $\Psi(w)$, которая конформно и однолистно отображает внешность единичного круга на внешность $\mathfrak{M}$ и нормирована условием $c_1 > 0$, где $c_1 = \Psi'(\infty)$.

Имеет место оценка [6, гл. VII] $d/4 \leqslant c_1 \leqslant d$.

Функция $\Psi(w)$ непрерывна при $|w| \in [1, \infty)$ [2, с. 349]; следовательно, функция $\Psi(w) - c_1 w$ непрерывна на $|w| \geqslant 1$ и, очевидно, аналитична в области $|w|>1$. Пусть $z\in\mathfrak{M}$. При $|w|=1$ имеем $|\Psi(w)-c_1w-z|\leqslant\leqslant d+c_1$; значит, и при $|w|\geqslant 1$ $|\Psi(w)-c_1w-z|\leqslant d+c_1$. При $|w|>6$ получаем

$$|\Psi(w)-z|\geqslant c_1|w|-|\Psi(w)-c_1w-z|\geqslant 6c_1-d-c_1\geqslant c_1, \tag{4}$$

а при $|w|=6$

$$|\Psi(w)-z|\leqslant 6c_1+d+c_1\leqslant 8d. \tag{5}$$

Из теоремы Гронуолла (см. [6, с. 49]) следует, что при $|w|\geqslant 6$ имеет место оценка

$$|\Psi'(w)|\leqslant c_1\left(1+\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}6^{-j}\right)<2c_1; \tag{6}$$

в частности,

$$|\Psi(w)-\Psi(w(1+1/n))e^{-it}|=\left|\int\limits_{w}^{w(1+n^{-1})e^{-it}}\Psi'(w)\,dw\right|<2c_1|w|(n^{-1}+|t|). \tag{7}$$

2°. Оценим многочлены

$$b_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=6}\{[\Psi(w)-z]w^{-1}\}^{q-1}w^{j-1}\Psi'(w)\,dw,\quad j=0,1,\dots,$$

и их производные $d^sb_j(z)/dz^s$.

Для точек $z\in\mathfrak{M}$ при всех $s=\overline{0,q-1}$ и $j=0,1,2,\dots$ из неравенств (5) и (6) вытекает

$$\left|\frac{d^s}{dz^s}b_j(z)\right|=\frac{1}{2\pi}(q-1)\dots(q-s)\left|\int\limits_{|w|=6}\{[\Psi(w)-z]w^{-1}\}^{q-1-s}\times\right.$$
$$\left.\times w^{j-1}\Psi'(w)\,dw\right|\leqslant c12\pi(8d)^{q-1-s}6^{-q+s+j}2c_1\leqslant c6^jd^{q-s}. \tag{8}$$

Очевидно, что при $s\geqslant q$ $d^sb_j(z)/dz^s\equiv 0$, так как $b_j(z)\in\mathcal{P}_{q-1}\cap\mathcal{P}_j$.

3°. Обозначим при всех $j=0,1,\dots$ и $n=2,3,\dots$

$$a_{j,n}(z)\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=6}w^{j-1}[\Psi(w)-z]\,\pi_{l,n}(\Psi(w),z)\,dw,$$

где (см. [2, с. 429 и 431]) $l=[r/2]+k+2$,

$$\pi_{l,n}(\Psi(w),z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{l+1,n}(t)[\Psi(\tilde{w}e^{-it})-z]^{-1}\,dt,$$

$J_{l+1,n}(t)$ — ядро типа Джексона, $\tilde{w}=w(1+n^{-1})$.

Нетрудно убедиться, что $a_{j,n}(z)\in\mathcal{P}_j$.

При всех $s=0,1,\dots,$ $j\in\mathbb{N}$ и $n=2,3,\dots$ представим многочлены $d^sa_{j,n}(z)/dz^s$ виде

$$\frac{d^s}{dz^s}a_{j,n}(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d^s}{dz^s}\int\limits_{|w|=6}w^{j-1}[\Psi(w)-z]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{l+1,n}(t)[\Psi(\tilde{w}e^{-it})-z]^{-1}dt\right]dw=\frac{1}{2\pi^2 i}\frac{d^s}{dz^s}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{l+1,n}(t)\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|w|=6}[\Psi(w)-z][\Psi(\tilde{w}e^{-it})-z]^{-1}w^{j-1}dw\right]dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi^2 i}\frac{d^s}{dz^s}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_{l+1,n}(t)\left[\int\limits_{|w|=6}[\Psi(w)-\Psi(\tilde{w}e^{-it})][\Psi(\tilde{w}e^{-it})-z]^{-1}\times\right.$$

$$\times w^{j-1}dw\Bigg] dt = \frac{s!}{2\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} J_{l+1,n}(t)\Bigg[\int_{|w|=6}[\Psi(w)-\Psi(\tilde{w}e^{-it})]\times$$

$$\times[\Psi(\tilde{w}e^{-it})-z]^{-s-1}w^{j-1}dw\Bigg] dt.$$

Для точек $z\in\mathfrak{M}$ из неравенств (7) и (4) вытекают оценки

$$\left|\frac{d^s}{dz^s}a_{j,n}(z)\right| \leqslant \frac{s!}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} J_{l+1,n}(t)\, 12\pi 2c_1 6\,(n^{-1}+|t|)\times$$

$$\times c_1^{-s-1}6^{j-1}dt \leqslant cc_1^{-s}6^j\int_{-\pi}^{\pi} J_{l+1,n}\,(t)\,(n^{-1}+|t|)\,dt \leqslant cc_1^{-s}6^j n^{-1}, \qquad (9)$$

$$s=0,1,\ldots,\quad j\in\mathbb{N},\quad n=2,3,\ldots.$$

Далее понадобится также оценка (см. [4, с. 237])

$$|1-a_{0,n}|\leqslant cn^{-1}. \qquad (10)$$

4°. В [4, с. 236] показано, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathfrak{M}}(\zeta-z)^q K(\zeta,z)\,d\zeta = \sum_{\lambda=1}^{q}[1-a_{0,n}]^{km-\lambda}(-1)^{\lambda+1}\binom{km}{\lambda}\sum_{\nu=\lambda}^{q} b_{q-\nu}B_{\lambda,\nu},$$

где $B_{\lambda,\nu}=\sum\limits_{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\lambda=\nu,\ \sigma_1\cdot\ldots\cdot\sigma_\lambda\neq 0} a_{\sigma_1,n}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma_\lambda,n}$. Стало быть, вследствие неравенств (8) — (10)

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{p!}\left|\sum_{\lambda=1}^{q}[1-a_{0,n}]^{km-\lambda}\binom{km}{\lambda}\frac{d^p}{dz^p}\sum_{\nu=j}^{q} b_{q-\nu}B_{\lambda,\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{\lambda=1}^{q}|1-a_{0,n}|^{km-\lambda}\sum_{\nu=\lambda}^{q}\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\left|\frac{d^{p-s}}{dz^{p-s}}b_{q-\nu}\frac{d^s}{dz^s}B_{\lambda,\nu}\right|\leqslant c\sum_{\lambda=1}^{q}n^{\lambda-km}\times$$

$$\times\sum_{\nu=\lambda}^{q}\sum_{s=0}^{p}c6^q d^{q-p+s}\left|\frac{d^s}{dz^s}B_{\lambda,\nu}\right|\leqslant c\sum_{\lambda=1}^{q}n^{\lambda-km}\sum_{\nu=\lambda}^{q}\sum_{s=0}^{p}d^{q-p+s}d^{-s}n^{-\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant cd^{q-p}\sum_{\lambda=1}^{q}n^{\lambda-km}n^{-\lambda}\leqslant cd^{q-p}n^{-km}.$$

Лемма 1 доказана.

1. *Шевчук И. А.* О k-х модулях непрерывности функций действительного и комплексного переменного.— В кн.: Междунар. конф. конструктивной теории функций, Благоевград (НРБ), 30 V — 6 VI 1977 : Тез. докл. Благоевград, 1977.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
3. *Шевчук И. А.* О конструктивной характеристике функций классов $D^r H^{\omega_2(t}$ на замкнутых множествах с кусочно-гладкой границей. — Укр. мат. журн., 1973, 25, № 1, с. 81—90.
4. *Шевчук И. А.* Конструктивная характеристика классов непрерывных на множестве $\mathfrak{M}\subset C$ функций для k-го модуля непрерывности.— Мат. заметки, 1979, 25, № 2, с. 225—247.
5. *Дзядык В. К.* К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости (по поводу одной проблемы С. М. Никольского).— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1975, 134, с. 63—114.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1966.— 628 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев Поступила 06.10.83