УДК 517.9:534.1

А. Ю. Швец

Влияние переменного запаздывания на устойчивость колебаний маятника с вибрирующим подвесом

Вопросы динамической устойчивости маятника при высокочастотных вибрациях точки подвеса рассматривались во многих работах, например [1—4]. В работе [5] исследована устойчивость колебаний маятника при наличии постоянного запаздывания в уравнениях движения. Целью настоящей статьи является изучение более общего случая переменного запаздывания.

Пусть точка подвеса маятника движется по следующему закону:

$$u(t) = a\cos\omega t, \quad v(t) = b\sin(\omega t + \varkappa), \tag{1}$$

где a, b, ω и $\varkappa$ — постоянные.

В качестве обобщенной координаты x примем угол отклонения маятника от вертикального направления. Обозначим через l приведенную длину маятника, g — ускорение земного притяжения, λ_1 — коэффициент затухания. Предположим, что

$$a/l = \varepsilon \ll 1, \quad b/l = \varepsilon r \ll 1, \quad \lambda_1 = \varepsilon\lambda, \quad \omega > \sqrt{gl}/a. \tag{2}$$

Тогда, следуя [5], уравнение движения маятника с учетом влияния переменного запаздывания может быть записано в виде

$$\ddot{x}(\tau) + 2q\varepsilon\dot{x}(\tau) + k^2\varepsilon^2 \sin x[\tau - h(\tau)] - \varepsilon\cos\tau\cos x[\tau - \delta(\tau)] - \\ - \varepsilon r \sin(\tau + \varkappa)\sin x[\tau - \delta(\tau)] = 0, \tag{3}$$

где $\tau = \omega t$ — безразмерное время,

$$k^2 = gl/a^2\omega^2, \quad q = \lambda_1 k/2\sqrt{g/l}. \tag{4}$$

Относительно запаздываний предположим, что $h(\tau)$ и $\delta(\tau)$ — непрерывно-дифференцируемые, ограниченные $(0 \leqslant h(\tau) \leqslant R,\ 0 \leqslant \delta(\tau) \leqslant R)$ и периодические с периодом 2π функции.

В уравнении движения (3) учтено запаздывание эффективной восстанавливающей силы $h(\tau)$ и запаздывание импульса источников энергии, возбуждающих колебания маятника $\delta(\tau)$.

Для исследования уравнения (3) применим метод усреднения. Вместо неизвестной функции $x(\tau)$ введем две новые неизвестные функции $\varphi(\tau)$ и $\Omega(\tau)$ по формулам:

$$x(\tau) = \varphi(\tau) - \varepsilon\cos\tau\cos\varphi(\tau) - \varepsilon r\sin(\tau + \varkappa)\sin\varphi(\tau), \quad \dot{x}(\tau) = \\ = \varepsilon\Omega(\tau) + \varepsilon\sin\tau\cos\varphi[\tau - \delta(\tau)] - \varepsilon r\cos(\tau + \varkappa)\sin\varphi[\tau - \delta(\tau)]. \tag{5}$$

При помощи замены переменных (5) уравнение (3) преобразуется в систему уравнений в стандартном виде, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3 из [6], обосновывающей применение метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на бесконечном интервале времени. Проведя операцию усреднения по методике, изложенной в работе [6], получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\dot{\varphi}(\tau) = \varepsilon\Omega, \quad \dot{\Omega}(\tau) = \varepsilon[(A\Omega - k^2)\sin\varphi + B\Omega\cos\varphi - 2q\Omega + \\ + (C + G)\sin 2\varphi + D\sin^2\varphi + E\cos^2\varphi]; \tag{6}$$

здесь

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\dot{\delta}(\tau)\sin\tau\, d\tau, \quad B = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\dot{\delta}(\tau)\cos(\tau + \varkappa)\, d\tau,$$

$$C = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\tau\cos[\tau - \delta(\tau)]\, d\tau, \quad D = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\tau\sin[\tau + \varkappa - \delta(\tau)]\, d\tau,$$

$$E = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\sin(\tau + \varkappa)\cos[\tau - \delta(\tau)]\, d\tau,$$

$$G = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} -\sin(\tau + \varkappa)\sin[\tau + \varkappa - \delta(\tau)]\, d\tau. \tag{7}$$

Значения коэффициентов (7) зависят только от запаздывания импульса источников энергии $\delta(\tau)$.

Система уравнений (6) имеет стационарные решения $\Omega = 0$, $\varphi = \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ — решение уравнения

$$(C + G)\sin 2\varphi + D\sin^2\varphi + E\cos^2\varphi - k^2\sin\varphi = 0. \tag{8}$$

Исследуем устойчивость данных решений. Уравнения в вариациях для системы уравнений (6) имеют вид

$$d\delta\varphi/d\tau = \varepsilon\delta\Omega, \quad d\delta\Omega/d\tau = \varepsilon [(A - k^2)\cos\bar{\varphi} - B\sin\bar{\varphi} + 2(C + G)\cos 2\bar{\varphi} + (D - E)\sin 2\bar{\varphi}]\,\delta\varphi + \varepsilon (A\sin\bar{\varphi} + B\cos\bar{\varphi} - 2q)\,\delta\Omega. \tag{9}$$

Из анализа полученной системы в вариациях (9) устанавливаем, что достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных решений системы уравнений (6) можно записать при помощи неравенств

$$A\sin\bar{\varphi} + B\cos\bar{\varphi} - 2q < 0, \tag{10}$$

$$(A - k^2)\cos\bar{\varphi} - B\sin\bar{\varphi} + 2(C + G)\cos 2\bar{\varphi} + (D - E)\sin 2\bar{\varphi} < 0. \tag{11}$$

Как уже было отмечено, значения коэффициентов A, B, C, D, E и G существенно зависят от запаздывания $\delta(\tau)$. Поэтому запаздывание $\delta(\tau)$ оказывает значительное влияние как на существование стационарных решений, так и на их устойчивость. В пространстве параметров системы уравнений (6) переменное запаздывание, по сравнению с постоянным, позволяет расширить области, в которых оно играет решающую роль в стабилизации или дестабилизации колебаний. В некоторых случаях функцию запаздывания $\delta(\tau)$ можно выбрать таким образом, что стационарное решение усредненной системы будет устойчивым (неустойчивым) независимо от значений остальных параметров системы (6).

Проиллюстрируем влияние запаздывания на некоторых конкретных примерах.

Пусть точка подвеса движется по горизонтали ($r = 0$). Тогда одним из возможных стационарных решений усредненной системы уравнений (6) будет решение (0, 0), соответствующее нижнему положению равновесия маятника. Как было установлено в работе [5], если $k^2 > 0{,}5$, то независимо от значений постоянного запаздывания данное положение равновесия всегда устойчиво. Если же $k^2 < 0{,}5$, то устойчивость решения (0,0) зависит от значений постоянного запаздывания. Предположим, что $\delta(\tau) = 2\cos\tau + \pi$. Тогда из условий (10), (11) вытекает, что колебания маятника около нижнего положения всегда неустойчивы. Если же $\delta(r) = \sin\tau + \pi$, то колебания маятника около нижнего положения будут устойчивыми для всех допустимых значений k.

Рассмотрим стационарное решение системы уравнений (6) $\Omega = 0$, $\varphi = \pi$, соответствующее верхнему положению равновесия маятника. В [5] установлено, что при $k^2 > 0{,}5$ данное положение равновесия всегда неустойчиво, а при $k^2 < 0{,}5$ его устойчивость зависит от значений постоянного запаздывания. Воспользовавшись условиями (10), (11), нетрудно убедиться, что при $\delta(\tau) = 2\cos\tau + 5\pi/2$ колебания маятника около верхнего положения всегда устойчивы, а при $\delta(\tau) = 2\sin\tau + 5\pi/2$ всегда неустойчивы. Причем устойчивость (или неустойчивость) будет иметь место при всех допустимых значениях a, l, ω и λ_1.

В заключение отметим, что если запаздывание $\delta(\tau) = \text{const}$, то условия асимптотической устойчивости (10), (11) совпадают с условиями, полученными в работе [5].

1. *Erdeli A.* Uber die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillirenden Aufhängenpunkt.— Zeitschr. fur Angew. Math. und Mech., 1934, **14**, S. 235—247.
2. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике.— Сб. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950, № 14, с. 9—34.
3. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— Журн. эксперим. и теор. физики, 1951, **24**, № 5, с. 588—597.
4. *Гадионенко А. Я.* О периодических движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса. —Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 5, с. 97—100.
5. *Митропольский Ю. А., Швец А. Ю.* О влиянии запаздывания на устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса.— В кн.: Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 115—120.
6. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter.— J. of Differential Equations, 1966, **2**, N 1, p. 57—73.

Ин-т мех. АН УССР, Киев

Поступила 10.01.84