УДК 519.216

А. Е. Родкина

О разрешимости стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$dx(t) = a(t, x(h(t)))\,dt + b(t, x(h(t)))\,dw(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad x(0) = 0; \tag{1}$$

$$d[x(t) - f(t, x(\tau(t)))] = a(t, x(h(t)))\,dt + b(t, x(h(t)))\,dw(t),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T; \quad x(0) = 0. \tag{2}$$

Условие Липшица по второму аргументу функций $a(t, u)$ и $b(t, u)$ заменим менее ограничительным условием (типа условия Гельдера или Осгуда), а оператор $(Fx)(t) = x(t) - f(t, x(\tau(t)))$ будем считать обратимым. При доказательстве теоремы о существовании и единственности решения задач (1) и (2) будем использовать теорию мер некомпактности и уплотняющих операторов [1].

1. Пусть $a : [0, T] \times R^1 \to R^1$, $b : [0, T] \times R^1 \to R^1$, $w(s)$ — стандартный винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве (Ω, U, P) (точки $\omega \in \Omega$ называются элементарными событиями, множества из σ-алгебры U — случайными событиями, P — вероятностная мера, т. е. счетно-аддитивная функция множеств из U, для которой $P(\Omega) = 1$).

Случайной величиной $\zeta(\omega)$ называется функция $\zeta : \Omega \to R^1$ такая, что $\{\omega : \zeta(\omega) < l\} \in U\ \forall l \in R^1$. Семейство случайных величин $\zeta(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, называется случайным процессом. Для краткости аргумент ω иногда будем опускать. Стандартный винеровский процесс $w(s)$ равен 0 при $t = 0$ и является процессом со стационарными независимыми приращениями, которые имеют гауссовское распределение с параметрами $M[w(t) - w(0)] = 0$, $M[w(t) - w(s)]^2 = t - s$, где M — знак математического ожидания.

Пусть $\mathcal{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы величины $w(s) - w(0)$ при всех $0 \leqslant s \leqslant t$.

Задачи (1) и (2) эквивалентны следующим уравнениям:

$$x(t) = \int_0^t a(s, x(h(s)))\,ds + \int_0^t b(s, x(h(s)))\,dw(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{1'}$$

$$x(t) = f(t, x(\tau(t))) + \int_0^t a(s, x(h(s)))\,ds + \int_0^t b(s, x(h(s)))\,dw(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2'}$$

Вторые интегралы в (1′) и (2′) понимаются в смысле Ито.

Случайный процесс $x(t)$ называется решением задачи (1) (или (2)), если $x(t)$ $\mathscr{F}_t$-измеримый, интегралы в (1') (в (2')) существуют и (1') ((2')) имеет место при каждом $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

По поводу более подробных определений и фактов из теории стохастических процессов см., напр., [2, 3].

Пусть C_T^0 — пространство непрерывных функций $x:[0, T] \to R^1$, $x(0) = 0$, с нормой $\|x\|_T = \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |x(s)|$; $C_T^\alpha = \{x \in C_T^0 : \|x\|_T^\alpha = \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |x(s)/s^\alpha|\}$; B_T^α — пространство измеримых случайных процессов $\zeta(t, \omega)$ с почти наверное непрерывными траекториями, при любом $t \in [0, T]$ измеримых относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_t$, $\zeta(0, \omega) = 0$ и $\|\zeta\|_{B_T^\alpha} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} t^{-\alpha} (M \|\zeta(\cdot, \omega)\|_t^2)^{1/2}$.

Лемма 1. *Пространство B_T^α банахово.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать полноту B_T^α. Пусть последовательность $\{\zeta_n\}$ фундаментальна в B_T^α, тогда из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду по (t, ω). Выделим еще одну подпоследовательность натуральных чисел $\{m_r\}$ такую, что $t^{-2\alpha} M \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\zeta_n(s) - \zeta_{n'}(s)|^2 < 2^{-r}$ при $t \in [0, T]$; $n, n' \geqslant m_r$. Тогда по лемме Бореля — Кантелли ряд $\zeta_{m_1}(t) + \sum_{r=0}^\infty |\zeta_{m_{r+1}}(t) - \zeta_{m_r}(t)|$ сходится почти наверное равномерно по $t \in [0, T]$. Значит, последовательность $\{\zeta_{m_r}(t)\}$ почти наверное равномерно сходится к непрерывному процессу $\zeta(t)$, который, как нетрудно видеть, принадлежит B_T^α. Осталось убедиться в том, что и вся последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится в B_T^α к ζ. Лемма доказана.

2. Предположим, что

I) $|a(t, u)|^2 \leqslant K(t^{-2\gamma} |u|^2 + t^{2\varepsilon_1})$, $\gamma < \min\{1, \alpha + 1/2\}$, $\varepsilon_1 > \max\{-1/2, \alpha - 1\}$, $K > 0$; $|b(t, u)|^2 \leqslant K(t^{-2\beta} |u|^2 + t^{2\varepsilon_2})$, $\beta < 1/2$, $\varepsilon_2 > \alpha - 1/2$;

II) функции $a(t, u)$, $b(t, u)$, $h(t)$ — борелевские и $\operatorname{mes} h^{-1}(e) \to 0$ при $\operatorname{mes} e \to 0$, где $\operatorname{mes} e$ — мера Лебега множества $e \subset [0, T]$.

Лемма 2. *Пусть выполнены I), II). Тогда оператор*

$$(Gx)(t) = \int_0^t a(s, x(h(s)))\, ds + \int_0^t b(s, x(h(s)))\, dw(s) \tag{3}$$

действует из B_T^α в B_T^α.

Доказательство. Пусть $x \in B_T^\alpha$, $t \in [0, T]$. Используя неравенство $M \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \left| \int_0^s \varphi(\tau, \omega)\, dw(\tau) \right|^2 \leqslant 4 \int_0^t M |\varphi(\tau, \omega)|^2 d\tau$, нетрудно получить следующее:

$$t^{-2\alpha} M \|Gx\|_t^2 \leqslant 2Kt^{-2\alpha} \left[t \int_0^t M |a(s, x(h(s)))|^2 ds + 4 \int_0^t M |b(s, x(h(s)))|^2 ds \right] \leqslant$$

$$\leqslant 2K_1 t^{-2\alpha} \left[t \int_0^t s^{-2\gamma} M |x(h(s))|^2 ds + t^{2\varepsilon_1 + 2} + 4 \int_0^t s^{-2\beta} M |x(h(s))|^2 ds + \right.$$

$$\left. + 4t^{2\varepsilon_2 + 1} \right] \leqslant A(t) \|x\|_{B_t^\alpha}^2 + B(t), \tag{4}$$

где $A(t) = K_2(t^{2-2\gamma} + 4t^{1-2\beta})$, $B(t) = K_2(t^{2\varepsilon_1 + 2 - 2\alpha} + 4t^{2\varepsilon_2 + 1 - 2\alpha})$.

Лемма 3. *Пусть выполнено* I); *тогда существует $H > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ задачи (1) на $[0, T']$ и любого $T' \leqslant T$ выполнено неравенство: $\|x\|_{B_{T'}^\alpha}^2 < H$.*

Доказательство. Положим $\mu(t) = \|x\|_{B_t^\alpha}^2$, $\varepsilon = \min\{-2\beta, 2\alpha - 2\gamma, 1 - 2\gamma\}$ (при этом $\varepsilon > -1$). Используя оценку (4) и то, что $s^{1-2\alpha} < K_3$

при $\alpha < 1/2$, $s \in [0, T]$, и $\tau^{2\alpha-1} < s^{2\alpha-1}$ при $\alpha > 1/2$, $\tau \in [0, s]$, получаем, что

$$\mu(t) \leqslant B(T) + K_2 \sup_{s \leqslant t} \left[s^{1-2\alpha} \int_0^s \tau^{2\alpha-2\gamma} \mu(\tau)\, d\tau + \int_0^s \tau^{-2\beta} \mu(\tau)\, d\tau \right] \leqslant$$

$$\leqslant B(T) + K_4 \int_0^t \tau^{\varepsilon} \mu(\tau)\, d\tau.$$

Из этого неравенства вытекает, что функция $\mu(t)$ ограничена на $[0, T]$. Лемма доказана.

Предположим, что

III) $|a(t, u) - a(t, v)|^2 \leqslant t^{\gamma_1} \mathscr{L}(t, |(u-v)/h^{\alpha}(t)|^2)$, $\gamma_1 \geqslant \max\{2\alpha - 1, 0\}$; $|b(t, u) - b(t, v)|^2 \leqslant t^{\beta_1} \mathscr{L}(t, |(u-v)/h^{\alpha}(t)|^2)$, $\beta_1 \geqslant 2\alpha$;

IV) $\mathscr{L}(t, u)$ непрерывна, не убывает и выпукла по u; неравенство $z(t) \leqslant A \int_0^t \mathscr{L}(s, z(h(s)))\, ds$, $0 \leqslant t \leqslant T$; где $A = 2T^{1-2\alpha+\gamma_1} + 8T^{\beta_1 - 2\alpha}$, не имеет ненулевых неотрицательных неубывающих решений.

При формулировке и доказательстве следующей леммы используются определения и факты из теории мер некомпактности и уплотняющих операторов [1].

Лемма 4. *Пусть выполняются* I)—IV). *Тогда оператор, определенный формулой* (3), *уплотняет на ограниченных множествах в пространстве* B_T^{α}.

Доказательство. Применяя конструкцию, близкую к [4], определим меру некомпактности в пространстве B_T^{α} так: для любого $\mathfrak{A} \subset B_T^{\alpha}$, $t \in [0, T]$, $\psi(\mathfrak{A})(t) = \chi_t(\mathfrak{A}_t)$, где $\mathfrak{A}_t$ — множество сужений функций из $\mathfrak{A}$ на отрезок $[0, t]$, χ_t — мера некомпактности Хаусдорфа в пространстве B_t^{α}. Предположим, что $\psi(\mathfrak{A}) \leqslant \psi(G\mathfrak{A})$ для некоторого ограниченного $\mathfrak{A} \subset B_T^{\alpha}$. Покажем, что тогда $\psi(\mathfrak{A}) \equiv 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция $\psi(\mathfrak{A})(t)$ не убывает и ограничена, то она имеет лишь конечное число скачков длины $\geqslant \varepsilon$. Выбросим из $[0, T]$ соответствующие этим скачкам точки вместе с δ-окрестностями и оставшееся множество разобьем точками β_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, на интервалы, на которых колебание $\psi(\mathfrak{A})(t)$ меньше ε. Окружим точки β_j δ-окрестностями и сконструируем семейство всевозможных непрерывных с вероятностью 1 функций $Z = \{Z_k, k = 1, \ldots, l\}$ так: z_k совпадает с каким-либо элементом $[\psi(\mathfrak{A})(\beta_j) + \varepsilon]$-сети множества $\mathfrak{A}_{\beta_j}$ в точках отрезка $\sigma_j = [\beta_{j-1} + \delta, \beta_j - \delta]$, $j = 1, \ldots, m$, а в остальных точках она линейна.

Пусть $u \in (G\mathfrak{A})_t$, тогда $u = (Gz)_t$ для некоторого $z \in \mathfrak{A}$, а значит, найдется $z_k \in Z$ такое, что при $s \in \sigma_j$ $s^{-2\alpha} M|z(s) - z_k(s)|^2 \leqslant (\psi(\mathfrak{A})(\beta_j) + \varepsilon)^2 \leqslant$ $\leqslant (\psi(\mathfrak{A})(s) + 2\varepsilon)^2$. Поэтому при $\sigma_j^t = \sigma_j \cap [0, h(t)]$, $h(t) = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} h(s)$

$$t^{-2\alpha} M[\|Gz - Gz_k\|_t^2] \leqslant 2t^{-2\alpha} \left[t \int_0^t s^{\gamma_1} \mathscr{L}(s, h^{-2\alpha}(s) M|z(h(s)) - z_k(h(s))|^2)\, ds + \right.$$

$$\left. + 4 \int_0^t s^{\beta_1} \mathscr{L}(s, h^{-2\alpha}(s) M|z(h(s)) - z_k(h(s))|^2)\, ds \right] \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{j=1}^{m} \int_{h^{-1}(\sigma_j^t)} \mathscr{L}(s, h^{-2\alpha}(s) M|z(h(s)) - z_k(h(s))|^2)\, ds +$$

$$+ A \int_{[0,t] / \bigcup_{j=1}^{m} h^{-1}(\sigma_j^t)} \mathscr{L}(s, h^{-2\alpha}(s) M|z(h(s)) - z_k(h(s))|^2)\, ds.$$

Выбрав достаточно малое $\delta > 0$, можно добиться, чтобы

$$[\psi(\mathfrak{A})(t)]^2 \leqslant [\psi(G\mathfrak{A})(t)]^2 \leqslant \varepsilon + A\int_0^t \mathscr{L}(s, [\psi(\mathfrak{A})(h(s)) + 2\varepsilon]^2)\, ds \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Отсюда и в силу IV) $\psi^2(\mathfrak{A}) \equiv 0$. Непрерывность оператора G доказывается аналогично. Поэтому G уплотняет. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняется* I)—IV). *Тогда задача* (1) *однозначно разрешима в* B_T^α.

Доказательство. Разрешимость задачи (1) в B_T^α вытекает из теоремы 3.4.3. работы [1]. Действительно, нетрудно проверить, что построенная в лемме 4 мера некомпактности ψ обладает нужными свойствами, из леммы 4 вытекает, что оператор G уплотняет, а оценка (4) и лемма 3 позволяют сначала найти решение на некотором малом отрезке $[0, T_1]$, а затем продолжить его на $[0, T]$. Для доказательства единственности решения задачи (1) следует воспользоваться условием IV).

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 видно, что условие III) достаточно считать выполненным только в некоторой правой окрестности тех точек $\theta \in [0, T]$, для которых $h(\theta) = \theta$ и $h(t) > \theta$ при $t > \theta$.

Замечание 2. Условие IV) выполнено, например, при

$$\mathscr{L}_1(t, u) = Hu^\rho, \quad 0 \leqslant h(t) \leqslant t^{1/\rho}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad H > 0, \quad T \leqslant 1;$$

$$\mathscr{L}_2(t, u) = \begin{cases} Ht^{-\eta}u\,|\ln|u||^\zeta, & |u| \leqslant e^{-\zeta}; \\ Ht^{-\eta}u\zeta^\zeta, & |u| \geqslant e^{-\zeta}; \end{cases} \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta < 1. \tag{5}$$

Пример 1. Пусть $a_1, b_1 \in C[0, T]$. Условия теоремы 1 выполнены для уравнений $dx(t) = a_1(t)\, t^{-\varepsilon}x^\rho(t^{1/\rho})\, dt + b_1(t)\, x^\rho(t^{1/\rho})\, dw(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, при $\varepsilon < \min\{1/2, \alpha\}$, $\rho \in [0, 1]$ и любом $\alpha \geqslant 0$; и $dx(t) = a_1(t)\, \mathscr{L}_2(t, x(h_1(t)))\, dt + b_1(t)\, \mathscr{L}_2(t, x(h_2(t)))\, dw(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при $\alpha = 0$, $\mathscr{L}_2$ из формулы (5), $\eta < 1/2$, $\zeta = 1/2$, $0 \leqslant h_{1,2}(t) \leqslant t$.

3. Пусть

V) $|f(t, u) - f(t, v)|^2 \leqslant Q^2|u - v|^2$,

VI) $k = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} (\tau(t)/t)^\alpha Q < 1$,

VII) $f(t, 0) \in C_T^\alpha$, $\tau(t)$ и $f(t, u)$ непрерывны по t.

Теорема 2. *Пусть выполняются* I) — VII) (*в* IV *вместо* A *фигурирует число* $A/(1 - k)$). *Тогда задача* (2) *однозначно разрешима в* B_T^α.

Доказательство. Из условий V) и VII) вытекает, что оператор $(\Phi_g u)(t) = f(t, u(\tau(t))) + g(t)$ при любом $g \in B_T^\alpha$ действует из B_T^α в B_T^α. Покажем, что он сжимает; действительно,

$$t^{-2\alpha}M\,\|\Phi_g u_1 - \Phi_g u_2\|_t^2 \leqslant Q^2 t^{-2\alpha} M \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |u_1(\tau(s)) - u_2(\tau(s))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant Q^2 \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\tau(t)/t)^{2\alpha}\tau^{-2\alpha}(t)\, M\,\|u_1 - u_2\|_{\tau(t)}^2 \leqslant k^2\|u_1 - u_2\|_{B_{\tau(t)}^\alpha}^2.$$

Поэтому оператор Φ_g для каждого $g \in B_T^\alpha$ имеет ровно одну неподвижную точку $\Phi_1(g)(t)$. Нетрудно проверить, что оператор Φ_1 удовлетворяет условию Липшица с константой $1/(1 - k)$ и является запаздывающим оператором, т. е. $\Phi_1(g)(t)$ можно записать в виде $\Psi(g_t)(t)$ (здесь $g_t \in B_t^\alpha$ и $g_t(s) = g(s)$ при $s \leqslant t$). Последнее вытекает из того, что неподвижную точку оператора Φ_g можно получить методом последовательных приближений.

Из сказанного выше вытекает, что задача (2) эквивалентна уравнению $x(t) = \Psi(J_t)(t)$, $J(t) = \int\limits_0^t a(s, x(h(s)))\, ds + \int\limits_0 b(s, x(h(s)))\, dw(s)$, однозначная разрешимость которого доказывается так же, как и теорема 1.

Пример 2. Пусть ρ, a_1, b_1, ε такие же, как в примере 1; $q < 1$; $f(t, u)$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица с константой

Q по u. Тогда каково бы ни было Q, найдется $\alpha \geqslant 0$ такое, что задача Коши $d[x(t) - f(t, x(qt))] = a_1(t) t^{-\varepsilon} x^{\rho}(t^{1/\rho}) dt + b_1(t) x^{\rho}(t^{1/\rho}) dw(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) = 0$, однозначно разрешима в B_T^{α}.

Замечание 3. В условиях теоремы 2 оператор

$$(Fx)(t) = x(t) - f(t, x(\tau(t))), \tag{6}$$

действующий в B_T^{α}, обратим; его обратный F^{-1} является запаздывающим оператором и удовлетворяет условию Липшица.

Замечание 4. Если $f(t, 0) \in C_T^{\alpha}$, то в условиях теоремы 2 оператор F, определенный (6) и действующий в C_T^{α}, обратим и обратный ему является запаздывающим оператором, удовлетворяющим условию Липшица. Этот факт остается справедливым и, например, в случае, когда $f(t, u)$ линейна по второму аргументу и задача $x(t) = f(t, x(\tau(t))) + g(t)$, $x(0) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, однозначно разрешима в $C_{T^*}^{\alpha}$ для любых достаточно малых $g \in C_{T^*}^{\alpha}$ и $T^* \in [0, T]$. Нетрудно показать, что если при этом $\alpha = 0$ и выполняются I) — VI), то задача (2) однозначно разрешима в B_T^0.

Пример 3. Пусть функции a_1, b_1, h_1, h_2 и $\mathscr{L}_2$ такие же, как в примере 1; $\varepsilon \in (0, 1)$; $\tau(t) > 0$ при $t > 0$ и ни в какой окрестности нуля $\tau(t) \not\equiv t$. Тогда задача $d[x(t) - (\varepsilon - 1) x(\tau(t)) - (\varepsilon - 1) x(\tau(\tau(t)))] = a_1(t) \times \mathscr{L}_2(t, x(h_1(t))) dt + b_1(t) \mathscr{L}_2(t, x(h_2(t))) dw(t)$, $t \geqslant 0$; $x(0) = 0$, разрешима в B_T^0 (см. [5, 6]).

Замечание 5. Нетрудно проверить, что все результаты остаются справедливыми, если вместо R^1 рассматривать R^n.

Замечание 6. Пусть в задаче (1) (или (2)) начальные условия ненулевые: $x(0) = x_0$, где случайная величина x_0 предполагается независимой от процесса $w(t) - w(0)$, а $\mathscr{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы величины x_0 и $w(s) - w(0)$ при $0 < s \leqslant t$. Тогда, если $\alpha = 0$, то результаты остаются справедливыми; при $\alpha > 0$ приходится накладывать другие ограничения: $|f(t, x_0)| \in C_T^{\alpha}$ и либо дополнительно к I) $\alpha, \gamma \leqslant 1/2$, $\gamma < 1 - \alpha$, $\beta < 1/2 - \alpha$; либо вместо I)

$$|a(t, u) - a(t, x_0)|^2 \leqslant K(t^{-2\gamma} |u - x_0|^2 + t^{2\varepsilon_1}), \quad |b(t, u) - b(t, x_0)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K(t^{-2\beta} |u - x_0|^2 + t^{2\varepsilon_2}), \quad |a(t, x_0)|^2 \leqslant K t^{2(\alpha - 1)}, \ |b(t, x_0)|^2 \leqslant K t^{2\alpha - 1},$$

где $\beta, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2, K$ такие же, как в I).

При выполнении этих условий в теоремах 1 и 2 утверждается существование единственного решения x такого, что $x - x_0 \in B_T^{\alpha}$.

Замечание 7. Если $h(t) \equiv t$, то уравнение (1) превращается в стохастическое уравнение Ито без запаздывания. Для таких уравнений имеется много результатов о существовании и единственности решения (см., напр., [7—9]). При $n = 1$ некоторые из них сильнее, чем теорема 1 (при $\alpha = 0$, $h(t) \equiv t$): например, в [7] оценочная функция $\mathscr{L}(t, u)$ может быть равной $Cu^{1/2} (\ln u)^{1/2}$. При $n > 1$ результаты из [8, 9] получены, вообще говоря, в дополнительном предположении невырожденности диффузии b. В данной работе этого ограничения нет.

1. *Садовский Б. Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы.— Успехи мат. наук, 1972, 27, вып. 1 (163), с. 81—146.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1965.— 655 с.
3. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
4. *Дядченко Ю. А.* О разрешимости нелинейного операторного уравнения типа Вольтерра.— В кн.: Теория операторных уравнений. Воронеж: изд-во Воронеж. ун-та, 1979, с. 22—33.
5. *Родкина А. Е.* О разрешимости уравнений нейтрального типа в различных функциональных пространствах.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 1, с. 64—69.
6. *Курбатов В. Г.* О спектре операторов с соизмеримыми отклонениями аргумента и постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 10, с. 1770—1775.