УДК 517

Л. А. Сахнович (Укр. академия связи, Одесса)

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ М. Г. КРЕЙНА

We consider the generalized M. G. Krein's differential system. We find the relation of the behavior of a solution of system to the character of corresponding spectral matrix-function.

Розглядається узагальнена диференціальна система М. Г. Крейна. Знайдено зв'язок між поведінкою розв'язку системи та характером відповідної спектральної матриці-функції.

1. Введение. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_1}{dx} = izDP_1 + A_{11}(x)P_1 + A_{12}(x)P_2,$$
$$\frac{dP_2}{dx} = A_{21}(x)P_1, \quad 0 \le x \le l, \tag{1}$$

где $P_1(x,z)$, $P_2(x,z)$, $A_{ij}(x)$ и D — $m\times m$-мерные матрицы, причем

$$A_{11}(x) = -A_{11}^*(x), \quad A_{12}(x) = A_{21}^*(x), \tag{2}$$

$$D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}, \quad d_k > 0. \tag{3}$$

Матрицы $A_{ij}(x)$ предполагаются непрерывными. Предположим еще, что выполнены следующие краевые условия:

$$P_1(0,z) = S_1, \quad P_2(0,z) = S_2, \tag{4}$$

где

$$\operatorname{rank} S_1 = \operatorname{rank} S_2 = m, \quad S_1^*S_1 = S_2^*S_2. \tag{5}$$

Если

$$m = 1, \quad d_1 = 1, \quad A_{11}(x) = 0, \quad S_1 = S_2, \tag{6}$$

то система (1), (4) совпадает с системой, изученной М. Г. Крейном [1].

Отметим, что система типа Дирака, уравнение Штурма – Лиувилля могут быть записаны в виде системы (1).

Если $m > 1$, $d_j \ne d_k$, $j \ne k$, то возникают отличные от классических спектральные задачи [2 – 4]. В данной статье выясняется связь между поведением $P_2(x,z)$ и характером спектральной матрицы-функции $\tau(\lambda)$.

Полученные результаты являются континуальными аналогами результатов теории ортогональных многочленов [5].

2. Основные определения. Введем пространство $L_D^2(0,\infty)$, состоящее из $(m\times 1)$-мерных вектор-функций $f(x)$, со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^\infty g^*(x)Df(x)\,dx.$$

Пространство $L_m^2(\tau)$, состоящее из $(m\times 1)$-мерных вектор-функций $F(u)$, определяется с помощью скалярного произведения

$$(F,G) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(u)[\,d\tau(u)\,]F(u). \tag{7}$$

Определение 1. *Монотонно возрастающая* $(m \times m)$*-мерная матрица-функция* $\tau(u)$, $-\infty < u < \infty$, *называется спектральной для краевой задачи* (1), (4), *если оператор*

$$Vf = \int_0^\infty P_1^*(x, u) D f(x)\, dx = F(u) \tag{8}$$

изометрически отображает пространство $L_D^2(0, \infty)$ *в* $L_m^2(\tau)$ [2].

Определение 2. *Спектральная матрица-функция* $\tau(u)$ *называется ортогональной, если оператор* V *унитарно отображает* $L_D^2(0, \infty)$ *на все пространство* $L_m^2(\tau)$.

3. Ограниченные решения. Отдельно рассмотрим случай, когда при некотором $a > 0$ выполняется неравенство

$$\| P_2(x, z) \| \le a, \quad 0 \le x < \infty, \quad \operatorname{Im} z \ge 0. \tag{9}$$

Утверждение 1. *Если выполнено условие* (9), *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \det \tau'(u)}{1 + u^2} du > -\infty. \tag{10}$$

Доказательство. В силу принципа компактности из условия (9) вытекает существование предела

$$\lim_{R_n \to \infty} P_2(R_n, z) = \mathcal{P}(z). \tag{11}$$

Поскольку условия (10) и (11) эквивалентны [4], то утверждение доказано.

Из условия (9) может быть выведен более сильный факт, чем утверждение 1.

Утверждение 2. *Пусть выполнено условие* (9) *и пусть* λ *и* μ *— точки непрерывности соответствующей спектральной матрицы-функции* $\tau(u)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\tau(\mu) - \tau(\lambda) \ge \frac{1}{2\pi a^2} (\mu - \lambda) E_m, \quad \mu > \lambda. \tag{12}$$

Доказательство. Матрица-функция Вейля – Титчмарша $v(z)$ системы (1) связана со спектральной матрицей-функцией $\tau(u)$ этой системы с помощью соотношения [2]

$$v(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u - z} - \frac{u}{1 + u^2} \right) d\tau(u), \quad \alpha = \alpha^*. \tag{13}$$

В [4] установлено неравенство

$$\frac{v(z) - v^*(z)}{i} \ge \mathcal{P}^{-1}(z) \mathcal{P}^{*-1}(z), \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{14}$$

Из формулы обращения Стильтьеса и соотношений (9), (13), (14) вытекает доказываемое утверждение.

4. Вспомогательные формулы. Пусть $f(x) = 0$ при $x \ge R$. Тогда в силу (8) верно соотношение

$$h^* F(z_0) = \int_0^R h^* P_1^*(x, z_0) D f(x)\, dx, \tag{15}$$

где h — постоянный $(m \times 1)$-мерный вектор, $h \ne 0$.

Из равенства (15) следует

$$\left|h^*F(z_0)\right| \le h^*K(z_0, z_0, R)h\int_0^R f^*(x)Df(x)\,dx. \tag{16}$$

Здесь использовано обозначение

$$K(z, \zeta, R) = \int_0^R P_1^*(x, z)DP_1(x, \zeta)\,dx. \tag{17}$$

Учитывая соотношение (8), записываем неравенство (16) в виде

$$\left|h^*F(z_0)\right|^2 \le h^*K(z_0, z_0, R)h\int_{-\infty}^{\infty} F^*(u)[\,d\tau(u)\,]F(u), \tag{18}$$

где $\tau(u)$ — спектральная $(m \times m)$-мерная матрица-функция системы (1), (4).

Из (18) непосредственно следует

$$\frac{\left|h^*F(z_0)\right|^2}{K_h(z_0, z_0, R)} \le \int_{-\infty}^{\infty} F^*(u)[\,d\tau(u)\,]F(u), \tag{19}$$

где

$$K_h(z_0, z_0, R) = h^*K(z_0, z_0, R)h. \tag{20}$$

Сопоставляя (15) и (16), приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3. *Равенство в соотношении* (19) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = \mu P_1(x, z_0)h, \quad \mu \in C. \tag{21}$$

5. Ограниченность решения в среднем. Далее будем рассматривать частный случай системы (1), когда

$$D = E_m, \quad A_{11}(x) = 0, \quad A_{12}(x) = A(x). \tag{22}$$

В этом случае система (1) принимает вид

$$\frac{dP_1}{dx} = izP_1 + A(x)P_2, \qquad \frac{dP_2}{dx} = A^*(x)P_2. \tag{23}$$

Предположим, что $(m \times m)$-мерная матрица $A(x)$ непрерывна и что решение $P_1(x, z)$, $P_2(x, z)$ системы (23) удовлетворяет краевым условиям (4).

Пусть $\tau_1(u)$, $\tau(u)$, $\tau_2(u)$ — спектральные $(m \times m)$-мерные матрицы-функции систем вида (23), (4). Этим спектральным матрицам-функциям с помощью формулы (17) ставятся в соответствие матрицы-функции $K^{(1)}(z, \zeta, R)$, $K(z, \zeta, R)$, $K^{(2)}(z, \zeta, R)$.

Утверждение 4. *Пусть спектральные матрицы-функции* $\tau_1(u)$, $\tau(u)$, $\tau_2(u)$ *таковы, что для любой пары вещественных чисел* λ, μ, $\mu > \lambda$, *выполняются неравенства*

$$\tau_1(\mu) - \tau_1(\lambda) \le \tau(\mu) - \tau(\lambda) \le \tau_2(\mu) - \tau_2(\lambda). \tag{24}$$

Тогда справедлива цепочка неравенств

$$K^{(2)}(z_0, z_0, R) \le K(z_0, z_0, R) \le K^{(1)}(z_0, z_0, R), \tag{25}$$

где $\operatorname{Im} z_0 \ge 0$.

Доказательство. Обозначим через H_R множество функций, представимых в виде

$$F_h(u) = h^* \int_0^R P_1^*(x, u) g(x) \, dx, \tag{26}$$

где h — $(m \times 1)$-мерный постоянный вектор, а $g(x)$ — непрерывная $(m \times 1)$-мерная вектор-функция.

Воспользуемся теперь существованием оператора преобразования [6], т. е. существованием такой непрерывной $(m \times m)$-мерной матрицы-функции $N(x, t)$, что

$$P_1(x, u) = S_1 \left[e^{iux} + \int_0^x N(x, t) e^{iut} \, dx \right]. \tag{27}$$

Из формул (26). (27) вытекает, что всем трем спектральным матрицам-функциям $\tau_1(u)$, $\tau(u)$, $\tau_2(u)$ соответствует одно и то же множество H_R. Тогда цепочка неравенств (25) вытекает из утверждения 3. Утверждение доказано.

Далее нам понадобится следующий пример.

***Пример* 1.**

$$A(x) = 0, \quad S_1 = S_2 = \alpha E_m, \tag{28}$$

где α — положительное число. В этом случае имеем

$$P_1(x, z) = \alpha e^{ixz} E_m, \quad P_2(x, z) = \alpha E_m. \tag{29}$$

Значит, соответствующая спектральная матрица-функция $\tau(u, \alpha)$ имеет вид

$$\tau(u, \alpha) = \frac{u}{2\pi\alpha^2} E_m. \tag{30}$$

Из утверждения 4 и формулы (30) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть спектральная* $(m \times m)$*-мерная матрица-функция* $\tau(u)$ *системы* (23), (4) *такова, что при некотором* $l > 0$ *и при всех* λ *и* μ, $\mu > \lambda$, *выполнено неравенство*

$$\tau(\mu) - \tau(\lambda) \ge l(\mu - \lambda) E_m. \tag{31}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{R} \int_0^R P_2^*(t, z_0) P_2(t, z_0) \, dt \le \frac{1}{2\pi l} E_m, \quad z_0 = \bar{z}_0. \tag{32}$$

Доказательство. Неравенство (31) можно записать в виде

$$\tau(\mu) - \tau(\lambda) \ge \tau(\mu, \alpha) - \tau(\lambda, \alpha), \tag{33}$$

где $l = \dfrac{1}{2\pi\alpha^2}$. Тогда в силу (25) и (29) верно неравенство

$$\frac{1}{R}\int_0^R P_1^*(t,z_0)P_1(t,z_0)\,dt \le \frac{1}{2\pi l}E_m, \qquad \operatorname{Im} z_0 \ge 0. \tag{34}$$

Используя формулу Лагранжа, из (1) и (4) выводим соотношение

$$P_2^*(R,z)P_2(R,z) - P_1^*(R,z)P_1(R,z) = 2\operatorname{Im} zK(z,z,R),$$

т. е.

$$P_2^*(R,z_0)P_2(R,z_0) = P_1^*(R,z_0)P_1(R,z_0), \qquad z_0 = \overline{z_0}. \tag{35}$$

Из соотношений (34) и (35) вытекает доказываемое неравенство (32).

Утверждение 5 является в некотором смысле обратным к утверждению 2. Действительно, в утверждении 2 при условии ограниченности $P_2(x;z)$ следует оценка $\tau(\mu)-\tau(\lambda)$, а в утверждении 5 из соответствующей оценки $\tau(\mu)-\tau(\lambda)$ следует ограниченность в среднем $P_2(x,z_0)$. Заметим еще, что константы в утверждениях 2 и 5 являются точными.

Аналогично утверждению 5 доказывается следующее утверждение.

Утверждение 6. *Если выполнено условие*

$$\tau(\mu) - \tau(\lambda) \le L(\mu-\lambda)E_m, \qquad \mu > \lambda,$$

то

$$\frac{1}{R}\int_0^R P_2^*(t,z_0)P_2(t,z_0)\,dt > \frac{1}{2\pi L}E_m, \qquad z_0 = \overline{z_0}.$$

1. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Докл. АН СССР. – 1955. – **105**, № 4. – С. 637–640.
2. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1. – С. 3–55.
3. *Сахнович Л. А.* Метод операторных тождеств //Алгебра и анализ. – 1993. – **5**, № 1. – С. 3 – 80.
4. *Sakhnovlch L. A.* On one class of canonical systems on half-axis // Integral Equations and Operator Theory. – 1998. – **31**, № 1. – P. 92 –112.
5. *Геронимус Я. Л.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. – М.: Физматгиз, 1958. – 240 с.
6. *Сахнович Л. А.* Спектральный анализ вольтерровых операторов, заданных в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 259–268.

Получено 01.02.99