УДК 517.432

С. О. Кужель (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЗБУРЕНЬ АБСТРАКТНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В СХЕМІ РОЗСІЯННЯ ЛАКСА – ФІЛЛІПСА

The inverse scattering problem for perturbations of an abstract wave equation is investigated in the framework of the Lax – Phillips scattering scheme.

У рамках схеми розсіяння Лакса – Філліпса вивчається обернена задача розсіяння для збурень абстрактного хвильового рівняння.

Вступ. Відомо [1], що застосування схеми розсіяння Лакса – Філліпса при дослідженні зосереджених в скінченній області збурень вільного хвильового рівняння

$$u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \text{ — непарне},$$

дає можливість отримати важливі результати про зв'язок між властивостями аналітичного продовження матриці розсіяння та характером збурення хвильового рівняння.

У роботах [2 – 4] схему розсіяння Лакса – Філліпса було застосовано для вивчення збурень системи, вільна еволюція якої задається диференціально-операторним рівнянням

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

де „вільний" оператор L діє в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{B}$ і, за означенням, задовольняє такі умови:

i) L — самоспряжене розширення оператора B^2, де оператор B є простим* максимальним симетричним оператором у просторі $\mathfrak{B}$;

ii) справджується рівність

$$(Lu, u) = \|B^* u\|^2 \quad \forall u \in D(L).$$

Довільний оператор L з властивостями i), ii) будемо називати *незбуреним*. Властивість оператора L бути незбуреним залежить від вибору оператора B. В [5] наведено означення оператора B у просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, для якого вільний лапласіан $-\Delta$, $D(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$ є незбуреним.

Множину всіх незбурених операторів при фіксованому операторі B позначимо через $\mathfrak{M}_B$. Ця множина містить принаймні два елементи: розширення Фрідріхса $L_\mu = B^* B$ та Крейна $L_M = B B^*$ оператора B^2. Повний опис цієї множини можна знайти в [2, 3].

Рівняння (1) з довільним незбуреним оператором L у правій частині будемо називати *абстрактним хвильовим рівнянням.* В [3] показано, що з точки зору підходу Лакса – Філліпса в теорії розсіяння, абстрактне хвильове рівняння та класичне вільне хвильове рівняння мають подібні властивості. Тому природно вважати, що абстрактне хвильове рівняння визначає незбурену еволюцію.

Означення 1. *Додатний самоспряжений оператор $\tilde{L}$, що діє в гільбертовому просторі $\tilde{\mathfrak{B}}$, будемо називати збуреним, якщо $\tilde{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{B}$ і $\tilde{L} \supset B^2$.*

Множину всіх збурених операторів при фіксованому операторі B позначимо через Υ_B і визначимо збурену еволюцію за допомогою рівняння

$$u_{tt} = -\tilde{L} u, \tag{2}$$

* Оператор є простим, якщо його звуження на довільний нетривіальний інваріантний підпростір не є самоспряженим оператором.

де $\tilde{L}$ — довільний збурений оператор. Рівняння (2) будемо називати *збуреним абстрактним хвильовим рівнянням.*

Вибираючи простий максимальний симетричний оператор B в різних функціональних просторах, одержуємо [2, 3] конкретні реалізації як абстрактного хвильового рівняння (парціальне хвильове рівняння на півосі, хвильове рівняння в $\mathbb{R}^n$ тощо), так і його збурень.

Традиційно в схемі Лакса – Філліпса вивчається пряма задача теорії розсіяння, тобто за відомим збуренням визначаються властивості відповідної матриці розсіяння. Обернену задачу вивчено значно менше, незважаючи на те, що розвинена техніка методу Лакса – Філліпса в теорії розсіяння забезпечує для цього добрі можливості.

Метою даної роботи є дослідження в межах схеми Лакса – Філліпса оберненої задачі для збуреного абстрактного хвильового рівняння (2). У першому пункті наводиться стандартне означення матриці розсіяння в термінах хвильових операторів, що зв'язують поведінку збуреної $W_{\tilde{L}}(t)$ та незбуреної $W_L(t)$ груп. У другому пункті наводиться простий операторний метод побудови за заданим збуреним оператором $\tilde{L}$ аналітичного продовження в нижню півплощину матриці розсіяння для збуреної групи $W_{\tilde{L}}(t)$. Третій пункт є основним. У ньому встановлюється необхідна та достатня умови того, що аналітична в нижній півплощині функція $S(z)$ є матрицею розсіяння Гейзенберга для збуреного абстрактного хвильового рівняння (2) і вивчається можливість однозначного відновлення збуреного оператора.

Результати цієї роботи частково анонсовані в [6, 7].

1. Означення матриці розсіяння. Нехай L є довільним незбуреним оператором в $\mathfrak{B}$. Поповнення області визначення $D(L)$ оператора L відносно норми $\|u\|_L^2 := (Lu, u)$ позначимо через $\mathfrak{B}_L$. У просторі початкових даних $H_L = \mathfrak{B}_L \oplus \mathfrak{B}$ абстрактне хвильове рівняння (1) стандартним чином [2] визначає унітарну групу $W_L(t)$ розв'язків задачі Коші. Генератор цієї групи має абсолютно неперервний спектр. Аналогічно, збурене абстрактне хвильове рівняння (2) визначає в просторі початкових даних $H_{\tilde{L}} := \tilde{\mathfrak{B}}_{\tilde{L}} \oplus \tilde{\mathfrak{B}}$ унітарну групу $W_{\tilde{L}}(t)$ розв'язків задачі Коші. Наступне твердження фактично доведено в [2].

Твердження 1. *Нехай оператори L та $\tilde{L}$ є відповідно незбуреним та збуреним розширенням оператора B^2. Тоді існують хвильові оператори*

$$\Omega_{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} W_{\tilde{L}}(-t)\, W_L(t).$$

В [2] побудовано унітарне відображення F простору H_L на $L_2(\mathbb{R}, N)$, що визначає спектральне зображення для незбуреної групи $W_L(t)$. Зазначимо, що розмірність допоміжного гільбертового простору N в цьому спектральному зображенні дорівнює ненульовому дефектному числу оператора B.

Оператор розсіяння в спектральному зображенні $S = F\Omega_+^* \Omega_- F^{-1}$ можна записати у вигляді оператора множення на функцію $S = S_{(\tilde{L}, L)}(\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, значеннями якої є стискуючі оператори у просторі N.

Функція $S_{(\tilde{L}, L)}(\delta)$ називається *матрицею розсіяння* для збуреної групи $W_{\tilde{L}}(t)$ відносно незбуреної групи $W_L(t)$.

Використовуючи результати роботи [2], неважко довести, що матриці розсіяння $S_{(\tilde{L}, L_1)}(\delta)$ та $S_{(\tilde{L}, L_2)}(\delta)$ для збуреної групи $W_{\tilde{L}}(t)$, $\tilde{L} \in \Upsilon_B$, що побудовані відносно незбурених груп $W_{L_1}(t)$ та $W_{L_2}(t)$, $L_i \in \mathfrak{M}_B$ відповідно, зв'язані рівністю

$$S_{(\tilde{L},L_1)}(\delta)J_{L_1} = S_{(\tilde{L},L_2)}(\delta)J_{L_2}, \tag{3}$$

де самоспряжений та унітарний в N оператор J_L однозначно характеризує* незбурений оператор L в множині $\mathfrak{M}_B$. Зокрема, оператору L_μ відповідає оператор $J_{L_\mu} = I$, а оператору L_M — оператор $J_{L_M} = -I$.

Таким чином, вибір незбуреного оператора з множини $\mathfrak{M}_B$ при означенні матриці розсіяння фактично не впливає на її властивості.

В [2] показано, що збурена група $W_{\tilde{L}}(t)$ має в просторі початкових даних $H_{\tilde{L}}$ вхідний та вихідний підпростори. Згідно з теорією Лакса – Філліпса [8], це означає, що матриця розсіяння $S_{(\tilde{L},L)}(\delta)$ є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині стискуючої операторнозначної функції $S_{(\tilde{L},L)}(z)$, яка називається *матрицею розсіяння Гейзенберга.* Властивості функції $S_{(\tilde{L},L)}(z)$ тісно пов'язані з властивостями збуреного оператора $\tilde{L}$ в правій частині рівняння (2).

2. Побудова матриці розсіяння Гейзенберга. В [4] запропоновано простий операторний метод побудови за заданим збуреним оператором $\tilde{L}$ матриці розсіяння Гейзенберга для збуреного абстрактного хвильового рівняння (2). Нагадаємо його основні етапи у вигляді, зручному для подальшого дослідження оберненої задачі.

Нехай $\tilde{L} \in \Upsilon_B$. Тоді при всіх $f \in D(\tilde{L})$ і $u \in D(B^2)$ справджується рівність

$$(P\tilde{L}\tilde{f},u) = (\tilde{f},B^2u) = (P\tilde{f},B^2u),$$

де P — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{B}}$ на $\mathfrak{B}$. Отже,

$$PD(\tilde{L}) \subset D(B^{2*}), \qquad P\tilde{L}\tilde{f} = B^{*2}P\tilde{f} \quad \forall\ \tilde{f} \in D(\tilde{L}). \tag{4}$$

Зауважимо, що $B^{2*} = B^{*2}$, оскільки оператор B є максимальним симетричним [3, 9].

Для довільної точки z, $\operatorname{Im} z < 0$, покладемо

$$L_z = B^*B^*|_{D(L_z)}, \qquad D(L_z) = P(\tilde{L} - z^2 I)^{-1}\mathfrak{B}. \tag{5}$$

З урахуванням (4) зрозуміло, що оператори L_z — коректно визначені оператори у просторі $\mathfrak{B}$ для довільної точки z з нижньої півплощини.

Множину операторів $\{L_z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ будемо називати *множиною образів* для збуреного оператора $\tilde{L}$. Наступне твердження випливає з результатів [10], його безпосереднє доведення можна знайти в [4].

Твердження 2. *У просторі $\mathfrak{B}$ оператори L_z з множини образів оператора $\tilde{L}$ є максимальними дисипативними (акумулятивними) при* $\operatorname{Re} z > 0$ ($\operatorname{Re} z < 0$) *і додатними самоспряженими при* $\operatorname{Re} z = 0$ *розширеннями симетричного оператора B^2. При цьому оператор, спряжений до оператора L_z, збігається з оператором $L_{-\bar{z}}$.*

Твердження 3. *Від'ємна піввісь належить резольвентній множині довільного оператора L_z з множини образів.*

Доведення. Нехай L_z — довільний оператор з множини образів оператора $\tilde{L}$. При $\operatorname{Re} z = 0$ згідно з твердженням 2 оператор L_z є додатним самоспряженим. Отже, у цьому випадку твердження 3 є вірним.

* Конкретне правило, за яким встановлюється взаємно однозначна відповідність між елементами множини самоспряжених та унітарних операторів в N та елементами множини $\mathfrak{M}_B$, випливає з явних формул для перетворення F, наведених в [2].

Розглянемо випадок, коли $\operatorname{Re} z \neq 0$. З рівностей (4) та (5) зрозуміло, що

$$(L_z - z^2 I)P\tilde{f} = P(\tilde{L} - z^2 I)\tilde{f} = (\tilde{L} - z^2 I)\tilde{f}$$

для довільного $\tilde{f} \in (\tilde{L} - z^2 I)^{-1}\mathfrak{B}$. Звідси випливає

$$\tilde{L}\tilde{f} = L_z f + z^2\tau, \tag{6}$$

де $f = P\tilde{f}$ і $\tau = \tilde{f} - f$. Тому

$$(\tilde{L}\tilde{f}, \tilde{f}) = (L_z f, f) + z^2\|\tau\|^2. \tag{7}$$

Отже,

$$\operatorname{Im}(L_z f, f) = -2(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)\|\tau\|^2. \tag{8}$$

З рівностей (7) та (8) одержуємо

$$\operatorname{Re}(L_z f, f) \geq \alpha(z)\operatorname{Im}(L_z f, f), \qquad \alpha(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{2(\operatorname{Re} z)\operatorname{Im} z}.$$

З цієї нерівності, рівності $L_z^* = L_{-\bar{z}}$ та добре відомого (див. [11, с. 346]) співвідношення між спектром необмеженого оператора та його числовою областю значень знаходимо

$$\sigma(L_z) \subset \{\lambda \,|\, \operatorname{Re}\lambda \geq \alpha(z)\operatorname{Im}\lambda\}. \tag{9}$$

Оскільки довільне від'ємне λ не задовольняє умову $\operatorname{Re}\lambda \geq \alpha(z)\operatorname{Im}\lambda$, то $(-\infty, 0) \subset \rho(L_z)$. Твердження 3 доведено.

Оператори L_z з множини образів збуреного оператора $\tilde{L}$ зручно описувати в термінах позитивного простору граничних значень оператора B^2.

Позначимо

$$\mathcal{H} = \ker(B^* B^* + I) = \ker(B^* + iI). \tag{10}$$

Легко бачити, що

$$D(B^* B^*) = D(L_\mu) \dotplus \mathcal{H}, \tag{11}$$

де $L_\mu = B^* B$ — розширення Фрідріхса оператора B^2.

Трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де Γ_i — відображення лінеалу $D(B^* B^*)$ в $\mathcal{H}$ такі, що

$$\Gamma_1 f = P_{\mathcal{H}}(L_\mu + I)u, \qquad \Gamma_2 f = h, \tag{12}$$

де $f = u + h$, $u \in D(L_\mu)$, $h \in \mathcal{H}$, а $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор в $\mathfrak{B}$ на $\mathcal{H}$, називається позитивним простором граничних значень симетричного оператора B^2 або, скорочено, позитивним ПГЗ.

Наступне твердження випливає з тверджень 2, 3 та загальної теорії позитивних ПГЗ [12, 13].

Твердження 4. *Довільний оператор L_z з множини образів оператора $\tilde{L}$ є звуженням оператора $B^* B^*$ на множину*

$$D(L_z) = \{f \in D(B^* B^*) \,|\, C_z \Gamma_1 f = \Gamma_2 f\}, \tag{13}$$

де обмежений оператор

$$C_z = [(L_z + I)^{-1} - (L_\mu + I)^{-1}]_{\mathcal{H}} \tag{14}$$

діє у просторі $\mathcal{H}$ і при $\operatorname{Re} z > 0$ $(\operatorname{Re} z < 0)$ є максимальним акумулятивним (дисипативним), а при $\operatorname{Re} z = 0$ — невід'ємним оператором таким, що $\|C_z\| \leq 1/2$. Оператор, спряжений до оператора C_z, збігається з оператором $C_{-\bar{z}}$.

Беручи до уваги (10), приходимо до висновку, що простір $\mathcal{H}$ і допоміжний простір N в означенні матриці розсіяння $S_{(\tilde{L}, L)}(\delta)$ мають однакову розмірність. Отже, ці простори є ізоморфними і можна вважати, що $N = \mathcal{H}$.

Доведення наступної теореми базується на відомому результаті В. М. Адамяна, Д. З. Арова [14] про зв'язок між матрицею розсіяння та характеристичною функцією стиску і наведене в [4].

Теорема 1. *Матриця розсіяння Гейзенберга для збуреної групи* $W_{\tilde{L}}(t)$ *відносно незбуреної групи* $W_{L_\mu}(t)$ *має вигляд*

$$S_{(\tilde{L}, L_\mu)}(z) = I - 4izC_z(I - 2(1-iz)C_z)^{-1}, \tag{15}$$

де оператори C_z *визначають множину образів збуреного оператора* $\tilde{L}$ *в* (13). *При цьому точка* $1/2(1-iz)$ *належить резольвентній множині оператора* C_z.

***Наслідок* 1.** *Множина образів* $\{L_z | \operatorname{Im} z < 0\}$ *збуреного оператора* $\tilde{L}$ *однозначно визначається за матрицею розсіяння Гейзенберга* $S_{(\tilde{L}, L_\mu)}(z)$.

Доведення. Позначимо $S(z) = S_{(\tilde{L}, L_\mu)}(z)$. Використовуючи зображення (15), одержуємо

$$C_z = \frac{1}{2}(I - S(z))[I - S(z) + iz(I + S(z))]^{-1}. \tag{16}$$

Зауважимо, що $0 \in \rho(I - S(z) + iz(I + S(z)))$, оскільки

$$I - S(z) + iz(I + S(z)) = (iz-1)(S(z) - \theta I), \quad \theta = \frac{1+iz}{1-iz},$$

де $\|S(z)\| \le 1$ і $|\theta| > 1$.

Підставляючи оператори C_z в (13), визначаємо множину образів $\{L_z | \operatorname{Im} z < 0\}$ збуреного оператора $\tilde{L}$.

3. Обернена задача. У цьому пункті будемо вивчати таку обернену задачу теорії розсіяння:

визначити властивості невідомого збуреного оператора $\tilde{L}$ *в правій частині рівняння* (2) *за властивостями матриці розсіяння Гейзенберга для цього рівняння.*

Зрозуміло, що для розв'язання такої задачі в першу чергу потрібно визначити необхідні і достатні умови, при яких довільна операторнозначна функція $S(z)$ буде матрицею розсіяння Гейзенберга для збуреного абстрактного хвильового рівняння (2).

Теорема 2. *Аналітична в нижній півплощині операторнозначна функція* $S(z)$, *значеннями якої при всіх* z, $\operatorname{Im} z < 0$, *є стискуючі оператори в гільбертовому просторі* N, *буде матрицею розсіяння Гейзенберга для збуреної групи* $W_{\tilde{L}}(t)$, $\tilde{L} \in \Upsilon_B$, *відносно незбуреної групи* $W_{L_\mu}(t)$ *тоді і тільки тоді, коли розмірність простору* N *дорівнює ненульовому дефектному числу оператора* B *і виконується рівність*

$$S^*(z) = S(-\bar{z}) \qquad \forall z, \ \operatorname{Im} z < 0. \tag{17}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція $S(z)$ — матриця розсіяння Гейзенберга для збуреної групи $W_{\tilde{L}}(t)$, $\tilde{L} \in \Upsilon_B$, відносно незбуреної групи $W_{L_\mu}(t)$. Тоді розмірність простору N дорівнює ненульовому дефектному числу оператора B і функцію $S(z)$ можна записати у вигляді (15), де згідно з твердженням 4 оператор C_z задовольняє рівність $C_z^* = C_{-\bar{z}}$. Враховуючи це, безпосередньо перевіряємо справедливість рівності (17).

Достатність. Оскільки розмірність простору N дорівнює ненульовому дефектному числу оператора B, то без обмеження загальності можна вважати, що $N = \mathcal{H}$.

Нехай функція $S(z)$ задовольняє умови теореми 2. Тоді для довільної точки z з нижньої півплощини формулою (16) можна визначити обмежений в $\mathcal{H}$ оператор C_z. Використовуючи рівності (16) та (17), безпосередньо перевіряємо, що

$$C_z^* = C_{-\bar{z}} \tag{18}$$

і

$$2\,\mathrm{Im}\,(C_z x, x) = \mathrm{Re}\,z\,(\|S(z)y\|^2 - \|y\|^2) + 2\,(\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{Im}\,(S(z)y, y), \tag{19}$$

$$2\,\mathrm{Re}\,(C_z x, x) =$$

$$= \|(I - S(z))y\|^2 + \mathrm{Im}\,z\,(\|S(z)y\|^2 - \|y\|^2) - 2\,(\mathrm{Re}\,z)\,\mathrm{Im}\,(S(z)y, y), \tag{20}$$

де

$$y = [I - S(z) + iz(I + S(z))]^{-1}x \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Зафіксуємо параметр $0 \le \varepsilon < 1$ і розглянемо функцію

$$\gamma_\varepsilon(z) = -i((I + \varepsilon S(z))(I - \varepsilon S(z))^{-1}x, x), \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{21}$$

З аналітичності функції $S(z)$ випливає, що функція $\gamma_\varepsilon(z)$ також аналітична за змінною z в нижній півплощині.

Покладемо $y = (I - \varepsilon S(z))^{-1}x$. З (21) одержуємо

$$\mathrm{Im}\,\gamma_\varepsilon(z) = \varepsilon^2\|S(z)y\|^2 - \|y\|^2, \qquad \mathrm{Re}\,\gamma_\varepsilon(z) = 2\varepsilon\,\mathrm{Im}\,(S(z)y, y). \tag{22}$$

Оскільки $S(z)$ — стискуючий оператор, то з першої рівності в (22) випливає, що $\mathrm{Im}\,\gamma_\varepsilon(z) < 0$ при всіх z з нижньої півплощини. Отже, функція $\gamma_\varepsilon(z)$ є $\mathcal{R}$-функцією [15]. З рівностей (17) та (21) зрозуміло, що

$$\overline{\gamma_\varepsilon(z)} = -\gamma_\varepsilon(-\bar{z}). \tag{23}$$

Відомо [16, с. 524], що якщо $\mathcal{R}$-функція задовольняє умову (23), то її можна записати у вигляді

$$\gamma_\varepsilon(z) = zF(z^2), \tag{24}$$

де $\mathcal{R}$-функція $F(\cdot)$ є стільтьєсівською (тобто належить класу $\mathcal{S}$). Це, зокрема, означає [15, с. 644], що

$$\mathrm{Im}\,F(\lambda) \le 0 \quad \text{та} \quad \mathrm{Im}\,(\lambda F(\lambda)) \le 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}\,\lambda < 0, \tag{25}$$

$$F(\lambda) \ge 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in (-\infty, 0). \tag{26}$$

Покладемо $\lambda = z^2$, де $\mathrm{Re}\,z > 0$. Тоді $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$. Із співвідношень (24) та (25) одержуємо

$$(\mathrm{Re}\,z)\,\mathrm{Im}\,\gamma_\varepsilon(z) + (\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{Re}\,\gamma_\varepsilon(z) = \mathrm{Im}\,(z\gamma_\varepsilon(z)) = \mathrm{Im}\,(\lambda F(\lambda)) \le 0,$$

$$(\mathrm{Re}\,z)\,\mathrm{Im}\,\gamma_\varepsilon(z) - (\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{Re}\,\gamma_\varepsilon(z) = |z^2|\,\mathrm{Im}\left(\frac{\gamma_\varepsilon(z)}{z}\right) = |\lambda|\,(\mathrm{Im}\,F(\lambda)) \le 0.$$

Отже, $|(\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{Re}\,\gamma_\varepsilon(z)| \le -(\mathrm{Re}\,z)\,\mathrm{Im}\,\gamma_\varepsilon(z)$, $\mathrm{Re}\,z > 0$. З цієї нерівності, враховуючи рівності (22) і спрямовуючи ε до 1, одержуємо

$$2\,|(\operatorname{Im} z)\operatorname{Im}(S(z)y,y)| \leq -(\operatorname{Re} z)\left(\|S(z)y\|^2 - \|y\|^2\right), \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{27}$$

Із співвідношень (19) та (27) випливає, що $\operatorname{Im}(C_z x, x) \leq 0$ при всіх $x \in \mathcal{H}$. Отже, оператор C_z є максимальним акумулятивним при $\operatorname{Re} z > 0$. Це з урахуванням рівності (18) означає, що оператор C_z є максимальним дисипативним при $\operatorname{Re} z < 0$.

Аналогічно із співвідношень (18), (20) та (27) випливає, що $\operatorname{Re}(C_z x, x) \geq 0$ при $|\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Im} z|$. Отже, у цьому випадку оператор C_z є максимальним акретивним.

Покладемо $\lambda = z^2$, де $\operatorname{Re} z = 0$. Тоді $\lambda = -|z^2| < 0$. З рівностей (21), (24) та нерівності (26) одержуємо, що обмежений оператор

$$T_\varepsilon = |z|\,(I + \varepsilon S(z))\,(I - \varepsilon S(z))^{-1}$$

є невід'ємним при $\operatorname{Re} z = 0$. Отже, при всіх $0 \leq \varepsilon < 1$ справджується нерівність

$$\|(I + T_\varepsilon)^{-1}\| \leq 1. \tag{28}$$

Зауважимо, що при $z \neq -i$ оператор $(I + T_\varepsilon)^{-1}$ можна записати у вигляді

$$(I + T_\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{|z| - 1}(I - \varepsilon S(z))(\varepsilon S(z) - \theta I)^{-1}, \qquad \theta = \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

З цієї рівності та (16), враховуючи те, що оператор $S(z)$ є стискуючим і $|\theta| > 1$, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \|(I + T_\varepsilon)^{-1}\| = \|2\,C_z\|.$$

Згідно з (28) це означає, що

$$\|C_z\| \leq \frac{1}{2} \tag{29}$$

при $\operatorname{Re} z = 0$ і $z \neq -i$. Справедливість рівності (29) при $z = -i$ одразу випливає з (16). Враховуючи (18) та акретивність оператора C_z при $\operatorname{Re} z = 0$, приходимо до висновку, що у випадку $\operatorname{Re} z = 0$ оператор C_z є невід'ємним.

Із загальної теорії позитивних ПГЗ [12, 13] та отриманих вище властивостей операторів C_z випливає, що ці оператори в позитивному ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ визначають з допомогою формули (13) множину $\{L_z \,|\, \operatorname{Im} z < 0\}$ власних розширень симетричного оператора B^2 з такими властивостями:

i) $-1 \in \rho(L_z)$ і $L_z^* = L_{-\bar{z}}$;

ii) оператор L_z є максимальним дисипативним (акумулятивним) при $\operatorname{Re} z > 0$ ($\operatorname{Re} z < 0$) і додатним самоспряженим при $\operatorname{Re} z = 0$;

iii) оператор L_z є максимальним акретивним при $|\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Im} z|$.

З властивості ii) операторів L_z випливає, що $z^2 \in \rho(L_z)$ для довільної точки z з нижньої півплощини. Отже, формулою

$$R_\lambda = (L_z - z^2 I)^{-1}, \qquad \lambda = z^2, \qquad \operatorname{Im} z < 0, \tag{30}$$

можемо коректно визначити функцію R_λ. При цьому з властивості i) випливає, що

$$R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}. \tag{31}$$

Покажемо, що R_λ є аналітичною від λ функцією в області $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. Дійсно, з аналітичності функції $S(z)$, рівності (16) та елементарної оцінки

$$\| [I - S(z) + iz(I + S(z)]^{-1} \| \le \frac{1}{|1+iz| - |1-iz|}, \quad \operatorname{Im} z < 0,$$

випливає, що функція C_z — аналітична за змінною z в нижній півплощині.

Оскільки множина розширень $\{L_z \,|\, \operatorname{Im} z < 0\}$ визначається в позитивному ПГЗ за допомогою функції C_z, то є вірною рівність (14). Тому з аналітичності функції C_z випливає аналітичність за змінною z функції $(L_z + I)^{-1}$.

Запишемо оператор R_λ у вигляді

$$R_\lambda = (L_z + I)^{-1} \Psi^{-1}(z), \tag{32}$$

де

$$\Psi(z) = (L_z - z^2 I)(L_z + I)^{-1} = I - (1 + z^2)(L_z + I)^{-1}. \tag{33}$$

З рівності (32) зрозуміло, що функція R_λ буде аналітичною по $\lambda = z^2$ функцією в області $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, якщо функція $\Psi^{-1}(z)$ буде аналітичною за змінною z в нижній півплощині. Зауважимо, що з розкладу (33) відразу випливає, що функція $\Psi(z)$ є аналітичною в нижній півплощині. При цьому

$$\| \Psi^{-1}(z) \| = \| (I + (1+z^2)(L_z - z^2 I)^{-1} \| \le 1 + |1 + z^2| \, \| (L_z - z^2 I)^{-1} \|. \tag{34}$$

Враховуючи властивості ii) та iii) операторів L_z, маємо

$$\| (L_z - z^2 I)^{-1} \| \le -\frac{1}{2|\operatorname{Re} z| \operatorname{Im} z}, \quad \text{якщо} \quad \operatorname{Re} z \ne 0,$$

і

$$\| (L_z - z^2 I)^{-1} \| \le \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2}, \quad \text{якщо} \quad |\operatorname{Re} z| < |\operatorname{Im} z|.$$

Використовуючи ці оцінки, із (34) отримуємо, що норма $\|\Psi^{-1}(z)\|$, як функція від z, є обмеженою функцією в околі довільної точки z з нижньої півплощини. З цього, враховуючи аналітичність функції $\Psi(z)$, елементарно випливає*, що функція $\Psi^{-1}(z)$ — аналітична в нижній півплощині.

Отже, функція R_λ — аналітична по λ в області $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. Згідно з теоремою 6 в [17], аналітичність функції R_λ разом з рівністю (31) та оцінкою

$$\left\| (L_z - \bar{z}^2 I)(L_z - z^2 I)^{-1} \right\| \le 1$$

(яка очевидним чином випливає з властивості ii) операторів L_z) означає, що функція R_λ є узагальненою резольвентою симетричного оператора B^2.

За допомогою формули обернення Стільтьєса [18]

$$\left(\left[\frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2} \right] f, f \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_\alpha^\beta \operatorname{Im}(R_{\delta+i\tau} f, f)\, d\delta, \quad f \in \mathfrak{B}, \quad \alpha < \beta, \tag{35}$$

узагальнена резольвента R_λ однозначно визначає спектральну функцію E_t си-

* Див., наприклад, зауваження ** на с. 83 роботи [17].

метричного оператора B^2. При цьому, враховуючи аналітичність функції R_λ в $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, одержуємо

$$\lim_{\tau\to+0}\int_\alpha^\beta \operatorname{Im}(R_{\delta+i\tau}f,f)\,d\delta = 0$$

при всіх $-\infty<\alpha<\beta<0$. Отже,

$$E_t = 0 \quad \text{при} \quad t<0. \tag{36}$$

На підставі теореми Наймарка [18, с. 399] спектральну функцію E_t можна записати у вигляді $E_t = P\tilde{E}_t$, де $\tilde{E}_t$ — спектральна функція самоспряженого розширення $\tilde{L}$ оператора B^2 в більш широкий простір $\tilde{\mathfrak{B}}\supset\mathfrak{B}$. При цьому, враховуючи (36), спектральну функцію $\tilde{E}_t$ можна вибрати таким чином, що $\tilde{E}_t = 0$ при $t<0$. Отже, без обмеження загальності можна вважати, що оператор $\tilde{L}$ є невід'ємним самоспряженим розширенням оператора B^2.

Нехай $\tilde{f}\in D(\tilde{L})$ і $(\tilde{L}-\alpha I)\tilde{f} = 0$, де $\alpha\geq 0$. Легко бачити, що для оператора $\tilde{L}$ є вірними рівності (4). Отже,

$$0 = (\tilde{L}-\alpha I)\tilde{f} = (B^{*2}-\alpha I)P\tilde{f} = (B^*-\sqrt{\alpha}I)(B^*+\sqrt{\alpha}I)P\tilde{f}. \tag{37}$$

Оскільки оператор B простий та максимальний симетричний, то $\ker(B^* - \mu I) = \{0\}$ для довільного $\mu\in\mathbb{R}$. Тому з (37) випливає, що $P\tilde{f} = 0$. Отже,

$$\ker(\tilde{L}-\alpha I)\subset\tilde{\mathfrak{B}}\ominus\mathfrak{B} \qquad \forall\,\alpha\geq 0.$$

Таким чином (звужуючи на $\tilde{\mathfrak{B}}\ominus\ker(\tilde{L}-\alpha I)$, якщо потрібно), оператор $\tilde{L}$ можна вважати додатним розширенням оператора B^2, тобто збуреним оператором. При цьому

$$R_\lambda = \int_0^\infty \frac{dE_t}{t-\lambda} = P\int_0^\infty \frac{d\tilde{E}_t}{t-\lambda} = P(\tilde{L}-\lambda I)^{-1}.$$

Звідси, беручи до уваги (5) та (30), одержуємо, що оператори $\{L_z \mid \operatorname{Im} z<0\}$ утворюють множину образів для збуреного оператора $\tilde{L}$. Отже, функція $S(z)$ є матрицею розсіяння Гейзенберга для збуреної групи $W_{\tilde{L}}(t)$ відносно незбуреної групи $W_{L_\mu}(t)$. Теорему 2 доведено.

Зауваження. З рівності (3) легко бачити, що формулювання теореми 2 залишиться вірним, якщо замість незбуреного оператора L_μ розглядати довільний незбурений оператор $L\in\mathfrak{M}_B$, а рівність (17) замінити на рівність

$$J_L S^*(z) = S(-\bar{z})J_L \qquad \forall\, z, \quad \operatorname{Im} z<0. \tag{38}$$

Згідно з наслідком 1 та рівністю (3) за матрицею розсіяння Гейзенберга можна однозначно відновити множину образів збуреного оператора $\tilde{L}$. Але за множиною образів ми не можемо однозначно відновити збурений оператор $\tilde{L}$. Так, збурений оператор $\tilde{L}$ в $\tilde{\mathfrak{B}}$ та оператор $\hat{L} = L_1\oplus\tilde{L}$ в $\hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_1\oplus\tilde{\mathfrak{B}}$, де L_1 — довільний додатний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{B}_1$, мають однакову множину образів.

Таким чином, для досягнення взаємно однозначної відповідності між множиною матриць розсіяння Гейзенберга та збуреними операторами в правій частині рівняння (2) необхідно накласти додаткові умови на множину збурених операторів.

Збурений оператор $\tilde{L}$ будемо називати *мінімальним,* якщо довільний нетривіальний підпростір простору $\tilde{\mathfrak{B}} \ominus \mathfrak{B}$ не приводить оператор $\tilde{L}$.

Мінімальні збурені оператори $\tilde{L}_1$ та $\tilde{L}_2$, що діють в просторах $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ та $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ відповідно, будемо називати *унітарно еквівалентними,* якщо існує таке ізометричне відображення X простору $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ на $\tilde{\mathfrak{B}}_2$, що

$$\tilde{L}_2 = X\tilde{L}_1X^{-1} \quad \text{і} \quad Xf = f \quad \text{при всіх} \quad f \in \mathfrak{B}.$$

Теорема 3. *При фіксованому операторі B матриця розсіяння Гейзенберга $S_{(\tilde{L}, L_M)}(z)$ відносно незбуреної групи $W_L(t)$, $L \in \mathfrak{M}_B$, однозначно, з точністю до унітарної еквівалентності, визначає мінімальний збурений оператор $\tilde{L}$ у правій частині рівняння* (2).

Доведення. Покладемо $S_{(\tilde{L}, L_\mu)}(z) = S_{(\tilde{L}, L)}(z) J_L$. Згідно з (3), функція $S_{(\tilde{L}, L_\mu)}(z)$ є матрицею розсіяння Гейзенберга відносно незбуреної групи $W_{L_\mu}(t)$. При доведенні теореми 2 показано, що ця матриця розсіяння однозначно визначає деяку спектральну функцію $E(t)$ симетричного оператора B^2. Згідно з теоремою 8 з [19], ця спектральна функція однозначно, з точністю до унітарної еквівалентності, визначає мінімальний збурений оператор $\tilde{L}$.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 3. – 324 с.
2. *Кужіль С. О.* Про елементи схеми розсіяння Лакса–Філліпса для ρ-збурень абстрактного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1615–1629.
3. *Kuzhel A. V., Kuzhel S. A.* Regular extensions of Hermitian operators. – Utrecht: VSP, 1998. – 270 p.
4. *Кужіль С. О.* Про вигляд матриці розсіяння для ρ-збурень абстрактного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 445–456.
5. *Кужіль С. О.* Про вигляд вхідного та вихідного підпросторів для хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$ // Там же. – № 5. – С. 711–715.
6. *Kuzhel S. A.* On the direct and inverse problems in scattering theory for a class of second-order operator-differential equations // Допов. НАН України. – 1999. – № 3. – С. 26–29.
7. *Kuzhel S. A.* On inverse problem in the Lax–Phillips scattering theory for a class of second-order operator-differential equations // Methods Funct. Anal. and Topology. – 1999. – **5**, № 2. – P. 40–44.
8. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
9. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
10. *Штраус А. В.* О расширениях симметрического оператора, зависящих от параметра // Изв. АН СССР. Математика. – 1965. – **29**, № 6. – С. 1389–1416.
11. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 357 с.
12. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–171.
13. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106–131.
14. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функциях сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 1. – С. 9–12.
15. *Кац И. С., Крейн М. Г.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя // Дополнение 1 в книге Ф. Аткинсона „Дискретные и непрерывные граничные задачи". – М.: Мир, 1968. – С. 629–647.
16. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
17. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Математика. – 1954. – **18**, № 1. – С. 51–86.
18. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
19. *Наймарк М. В.* Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Математика. – 1940. – **4**, № 3. – С. 277–318.

Одержано 22.06.99