УДК 517.944

В. М. Борок

О единственности решения задачи Коши для систем линейных нагруженных уравнений

Так называемые нагруженные дифференциальные уравнения возникают при рассмотрении ряда прикладных задач и при решении краевых задач для уравнений в частных производных некоторыми приближенными методами; изучению различных краевых задач для таких уравнений посвящено значительное число работ (см. [1—3] и библиографию в [1]), в частности, в [2] с позиций общей теории уравнений в частных производных изучена задача Коши для уравнений вида

$$D_t u(x, t) = P(D_x) u(x, t) + \sum_{\alpha \in A} Q_\alpha(D_x) u(x, t_\alpha), \ (x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, T], \qquad (1)$$

где $P(s)$ и $Q_\alpha(s)$ ($\alpha \in A$, A — заданное конечное множество) — произвольные полиномы. Наличие «нагрузок» по временной координате (группы слагаемых $\Sigma Q_\alpha(D_x) u(x, t_\alpha)$ в (1)) существенно влияет на классы единственно ти решения задачи Коши (КЕРЗК). Совпадение КЕРЗК для уравнения (1) и для уравнения

$$D_t u(x, t) = P(D_x) u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, T], \qquad (2)$$

имеет место лишь в особом (так называемом абсолютно невырожденн ом случае, и тогда эти классы состоят из функций, имеющих экспоненциальный порядок роста выше 1 при $|x| \to \infty$ [4].

В случае, когда уравнение содержит «нагрузки» по пространственным координатам, результат оказывается принципиально иным. Установим, что КЕРЗК для систем уравнений вида (2) ($u \in \mathbb{C}^n$, $P(s)$ — $n \times n$-матрица) совпадают или почти совпадают с КЕРЗК для аналогичной системы, «возмущенной» нагруженными членами, сосредоточенными на гиперплоскостях $x = \mathrm{const}$ и в фиксированных точках:

$$D_t u(x, t) = P(D_x) u(x, t) + Q[u] + R[u], \qquad (3)$$

где $Q[u] = \sum_{\alpha \in A} Q_\alpha(D_x) u(x_\alpha, t)$, $R[u] = \sum_{\beta \in B} R_\beta(D_x) u(x_\beta, t_\beta)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, T]$; A, B — фиксированные конечные множества; $x_\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in A$, $(x_\beta, t_\beta) \in \mathbb{R}^m \times [0, T]$, $u(x, t) \in \mathbb{C}^n$; $P(s)$, $Q_\alpha(s)$, $\alpha \in A$, $R_\beta(s)$, $\beta \in B$, — произвольные $n \times n$-матрицы, элементами которых являются любые многочлены относительно $s \in \mathbb{C}^m$.

Обозначим $L = P(0) + \sum_{\alpha \in A} Q_\alpha(0)$, $\mathcal{E}_L(t) = \int_0^t \exp\{L\tau\}\, d\tau$, $H = \sum_{\beta \in B} R_\beta(0) \mathcal{E}_L(t_\beta)$.

Теорема. *Если матрица H не имеет единичных собственных значений, то КЕРЗК для систем (2) и (3) совпадают. В противном случае однородная задача Коши для системы (3) всегда имеет решение $u(x, t) \equiv \alpha(t) \not\equiv 0$; всякое ее решение в КЕРЗК для системы (2) имеет такой вид.*

Доказательство. Пусть $\Delta = \det(I - H) \neq 0$.

А. Пусть $u(x, t)$ — решение однородной задачи Коши для системы (3) и пусть $u(x, t) \in K$, где K — КЕРЗК для системы (2). Поскольку класс K линеен и, как известно [4], ограниченные функции в нем заведомо содержатся, то $\forall \mu(t) \in C[0, T]$ получаем $v(x, t) \equiv u(x, t) - \mu(t) \in K$.

Обозначим $\psi_u(t) = Q[u] + R[u]$ и $\mu_u(t) = \int\limits_0^t \exp\{P(0)\tau\}\psi_u(t-\tau)\,d\tau$ Тогда $\mu'_u(t) = P(0)\mu_u(t) + \psi_u(t)$, откуда следует, что $v(x, t) \equiv u(x, t) - \mu_u(t)$ — решение системы (2). Поскольку $v(x, t) \in K$ и $v(x, 0) \equiv 0$, то $v(x, t) \equiv 0$. Следовательно, $u(x, t) \equiv a(t)$. Из системы (3) заключаем, что $a(t)$ — решение системы

$$a'(t) = La(t) + \sum_{\beta\in B} R_\beta(0)\, a(t_\beta) \tag{4}$$

и $a(0) = 0$. Полагая

$$a(t) = \exp\{Lt\}\,\alpha(t), \tag{5}$$

получаем

$$\alpha(t) = \mathscr{E}_{-L}(t)\,\tilde{R}[\exp\{Lt\}\,\alpha(t)], \tag{6}$$

где $\tilde{R}[h(t)] = \sum\limits_{\beta\in B} R_\beta(0)\,h(t_\beta)$. Подставляя в последнее соотношение значения $t = t_\beta$, умножая слева на $\exp\{Lt_\beta\}$ и суммируя, получаем систему линейных уравнений $\tilde{R}[\exp\{Lt\}\alpha(t)] = H\tilde{R}[\exp\{Lt\}\alpha(t)]$. силу условия $\Delta \neq 0$, заключаем, что $\tilde{R}[\exp\{Lt\}\alpha(t)] = 0$. Из (6) теперь видно, что $\alpha(t) \equiv 0$; возвращаясь к $u(x, t) \equiv a(t)$, получаем требуемое тождество $u(x, t) \equiv 0$.

Б. Пусть теперь в некотором классе K однородная задача Коши для системы (2) имеет решение $v(x, t) \not\equiv 0$. Обозначим $\varphi_v(t) \equiv Q[v] + R[v]$. Если $a(t)$ — решение системы

$$a'(t) = La(t) + \tilde{R}[a] + \varphi_v(t) \tag{7}$$

и $a(0) = 0$, то $u(x, t) = v(x, t) + a(t)$ — решение однородной задачи Коши для системы (3), причем $u(x, t) \not\equiv 0$ (поскольку $\sup \| v(x, t) \| = \infty$) и $u(x, t) \in K$. Установим, что система (7) всегда имеет решение $a(t)$, $a(0) = 0$ Снова вводя функцию $\alpha(t)$ согласно (5) и действуя, как в предыдущем случае, приходим к системе $\tilde{R}[a(t)] = H\tilde{R}[a(t)] + \tilde{R}[\psi_v(t)]$, где $\psi_v(t) = \int\limits_0^t \exp\{L(t-\tau)\}\varphi_v(\tau)\,d\tau$.

Условие $\Delta \neq 0$ обеспечивает разрешимость этой линейной системы (относительно $\tilde{R}[a(t)]$). Подставляя найденное значение $\tilde{R}[a(t)]$ в (7), получим для определения $a(t)$ систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В. Если матрица H имеет единичное собственное значение, то, обозначив ξ какой-либо соответствующий собственный вектор, непосредственной проверкой убедимся в том, что функция $u(x, t) \equiv \mathscr{E}_L(t)\xi$ — ограниченное решение задачи Коши для системы (3) и $u(x, 0) \equiv 0$. Последнее утверждение теоремы уже установлено в А. Теорема доказана.

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения.— Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 1, с. 86—94.
2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. I. Единственность.— Изв. вузов. Математика, 1981, № 9, с. 5—12.
3. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. II. Корректность.— Там же, 1981, № 10, с. 3—9.
4. *Чаус Н. Н.* О единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 1, с. 125—130.

Харьков. гос. ун-т,

Поступила в 20.01.84