УДК 517.948

М. М. Маламуд

Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному

Пусть A — линейный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H. В терминах резольвенты $R_A(z) = (A - z)^{-1} = R(z)$ оператора A получим критерий его подобия самосопряженному оператору $T = T^*$, с помощью которого сравнительно просто доказываются известные результаты [1—6] на эту тему.

Отметим, что ограниченный оператор с вещественным спектром всегда генерирует группу $U(t)$, $-\infty < t < +\infty$, типа нуль, т. е. группу, для которой $\lim\limits_{|t|\to\infty} t^{-1} \ln \| U(t) \| = 0$, и поэтому все доказательства в этом случае упрощаются.

1. Критерий подобия.

Теорема 1. *Для подобия замкнутого оператора A самосопряженному необходимо и достаточно выполнения неравенств*

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R_A(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant C_1^+ \| f \|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in H, \tag{1}$$

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R_{A^*}(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant C_2^+ \| f \|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in H \tag{2}$$

с некоторыми константами C_1^+, C_2^+, не зависящими от $f \in H$.

Доказательство. Из равенств (1) и (2) легко вытекают аналогичные оценки для резольвенты в нижней полуплоскости $z = \lambda - i\varepsilon$. Действительно, неравенство (2) гарантирует принадлежность при любом $\sigma > 0$ вектор-функции $R_{A^*}(z) f$ классу Харди $H_2^+(\sigma; H)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \sigma > 0$. Стандартное следствие этого факта — неравенство $\varepsilon \| R_A(\lambda - i\varepsilon) \| = \varepsilon \| R_{A^*}(\lambda + i\varepsilon) \| \leqslant \sqrt{2C_2^+/\pi}$, учтя которое, получим из (1):

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R_A(\lambda - i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R_A(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda + 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| [R_A(\lambda + i\varepsilon) -$$

$$- R_A(\lambda - i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant 2C_1^+ \| f \|^2 + 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| 2i\varepsilon R_A(\lambda - i\varepsilon) R_A(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^+ \| f \|^2 + 16\pi^{-1} C_2^+ \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R \;\; (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda = C_1^- \| f \|^2, \tag{3}$$

где $C_1^- = 2C_1^+(1 + 8C_2^+/\pi)$. Аналогично устанавливается неравенство

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| R_{A^*}(\lambda - i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant C_2^- \| f \|^2, \tag{4}$$

в котором $C_2^- = 2C_2^+(1 + 8C_1^+/\pi)$.

Пусть $(-iA)$ и $(-iA^*)$ — генераторы групп $U(t)$ и $U_1(t)$ класса C_0 (последнее допущение излишне — см. замечание 6). Тогда, как следует из [7, с. 358] и оценок (1)—(4), $U(t)$ и $U_1(t)$ — группы типа нуль. Из предложения 1 при $\alpha = \varphi(t) \equiv 1$ получаем эквивалентность каждой пары оценок (1), (4) и (2), (3) неравенствам $\| U(t) \| \leqslant k_+$, $t \geqslant 0$, и $\| U(t) \| \leqslant k_-$, $t \leqslant 0$, соответственно. В силу теоремы С. Надя [8] группа $U(t)$ подобна унитарной.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $(-iA)$ *и* $(-iA^*)$ — *генераторы полугрупп* $U(t)$ *и* $U_1(t)$, $t \geqslant 0$, *типа нуль*; $\varphi(t)$ — *функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Тогда при* $\alpha \geqslant 1$ *из неравенств*

$$\varepsilon^{2\alpha-1}\varphi^{-1}(1/\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R_A(\lambda+i\varepsilon)f\|^2 d\lambda \leqslant C_1\|f\|^2 \quad \forall\,\varepsilon>0, \quad \forall f\in H,$$

$$\varepsilon^{2\alpha-1}\varphi^{-1}(1/\varepsilon)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R_{A^*}(\lambda-i\varepsilon)f\|^2 d\lambda \leqslant C_2\|f\|^2 \quad \forall\,\varepsilon>0, \quad \forall f\in H \tag{5}$$

следует неравенство

$$\|U(t)\| = \|U^*(t)\| \leqslant C_3(1+t)^{2\alpha-2}\varphi(t), \quad t\geqslant 0. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно (см. [7]), $\forall\,\varepsilon>0$ и $\forall f\in H$

$$R_A(\lambda+i\varepsilon)f = i\int\limits_0^{\infty} e^{i(\lambda+i\varepsilon)t}U(t)f\,dt. \tag{7}$$

Вытекающее из (7) равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R_A(\lambda+i\varepsilon)f\|^2 d\lambda = 2\pi\int\limits_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t}\|U(t)f\|^2 dt \tag{8}$$

вместе с первым из неравенств (5) дают

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t}d\sigma_f(t) \leqslant C_1\varepsilon^{2\alpha-1}\varphi(1/\varepsilon)\|f\|^2, \quad \sigma_f(t) = \int\limits_0^t \|U(S)f\|^2 ds. \tag{9}$$

Применяя к (9) тауберову теорему Карамата [9], получим: $\sigma_f(t) \leqslant C_1 e(1+t)^{2\alpha-1}\varphi(t)\|f\|^2$. Аналогичные рассуждения для оператора A^* ведут к неравенству (заметим, что $U_1(-s) = U^*(s)$)

$$\sigma_g^*(t) = \int\limits_{-t}^{0}\|U_1(s)g\|^2 ds = \int\limits_0^t \|U^*(s)g\|^2 ds \leqslant C_2 e(1+t)^{2\alpha-1}\varphi(t)\|g\|^2.$$

Сложив последние два неравенства, считая $\|f\| = \|g\| = 1$, получим:

$$(C_1+C_2)(1+t)^{2\alpha-1}\varphi(t) \geqslant \sigma_f(t)+\sigma_g^*(t) = \int\limits_0^t(\|U(t-s)f\|^2+\|U^*(s)g\|^2)\times$$

$$\times\, ds \geqslant 2\int\limits_0^t|(U(t-s)f,\ U^*(s)g)|\,ds = 2\int\limits_0^t|(U(t)f,\ g)|\,ds = 2t\,|(U(t)f,\ g)|.$$

Отсюда и следует (6). Предложение доказано.

Т е о р е м а 2. *Пусть резольвента оператора* A *удовлетворяет оценкам* (2) *и* (3). *Тогда* A *подобен самосопряженному, если и только если*

$$\varepsilon\|R_A(\lambda+i\varepsilon)f\| \leqslant C_1\|f\|. \tag{10}$$

Для доказательства нужно лишь установить оценку (1), которая выводится из (3) и (10) так же, как оценка (3) из (1) и (2) в теореме 1.

С л е д с т в и е. *Пусть* $(-iA)$ — *генератор сильно непрерывной полугруппы* $U(t)$, $t\leqslant 0$, *и* $\|U(t)\| \leqslant C_1$. *Тогда подобие оператора* A *самосопряженному эквивалентно наличию оценки* (10).

2. З а м е ч а н и е о б о п е р а т о р н о м и с ч и с л е н и и.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для оператора, удовлетворяющего условию* (3), *следующие неравенства эквивалентны*:

$$\varepsilon^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R_A(\lambda+i\varepsilon)f\|^2 d\lambda \leqslant C_1\|f\|^2 \qquad \forall\,\varepsilon>0, \tag{11}$$

$$\varepsilon^{(\alpha+1)/2}\|R_A(\lambda+i\varepsilon)\| \leqslant C_2 \qquad \forall\,\varepsilon>0. \tag{12}$$

Доказательство. Неравенство (12) — следствие неравенства (11), гарантирующего принадлежность при любом $\sigma>0$ вектор-функции $R(z) f$ классу Харди $H_2^+(\sigma; H)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z>\sigma>0$. Обратная импликация получается с учетом условий (2), (3) так же, как при доказательстве теоремы 2. Предложение доказано.

Таким образом, для оператора A, удовлетворяющего условию (3) (в частности, диссипативного), наличие оценки (11) позволяет распространить операторное исчисление на класс $W_2^\alpha(-\infty, +\infty)$, что следует из работы [10]. Это усиление результатов работ [11, 12] и др. (см. библиографию в [12]). При $\alpha=1$ операционное исчисление богаче — такое, как у самосопряженного оператора.

Приведем в заключение этого пункта примеры операторов, удовлетворяющих при заданном $\alpha \geqslant 1$ двусторонней оценке $C_2\|f\|^2 \leqslant \varepsilon^\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R(\lambda+ i\varepsilon) f\|^2 d\lambda \leqslant C_1\|f\|^2$.

При $\alpha \geqslant 1$ оператор $T_\beta f=(M+\beta J) f=x f(x)+\beta \int\limits_0^x f(t)\, dt$ удовлетворяет в $L_2[0,1]$ нужным оценкам при $\beta=(\alpha-1)/2+i\gamma$, что следует из неравенств $k_1 \leqslant(1+|t|^{(\alpha-1)/2})\|U(t)\| \leqslant k_2$, $-\infty<t<\infty$, для группы $U(t)=\exp(-i t T_\beta)$ и равенства (8).

Другой пример подобного рода получим, рассмотрев оператор $M: f(x) \rightarrow x f(x)$ в пространствах W_2^k (k — целое) и интерполяционных между ними пространствах $B_{2a}^s=(W_2^k, W_2^{k+1})_\theta$, где $0<\theta<1$, $s=(1-\theta) k+\theta(k+1)=k+\theta$.

3. Подобие диссипативного оператора самосопряженному.

Рассмотрим максимальные диссипативные (м. д.) операторы вида $B=G+i V$, где $G=G^*$, а оператор $V=V^*$ неотрицательный. Для корректности определения мнимой компоненты считаем оператор V сильно G-ограниченным: т. е. $D(G) \subset D(V)$ и существуют $0 \leqslant a<1$, $b>0$ такие, что

$$\|V f\| \leqslant a\|G f\|+b\|f\|, \quad a<1, \quad \forall f \in D(G). \tag{13}$$

Характеристическая функция $W(z): E \rightarrow E$, где $E=\overline{R(V)}$, м. д. оператора B определяется формулой $W_B(z)=I+2 i V^{1/2}(B^*-z)^{-1} V^{1/2}$ и является аналитической сжимающей оператор-функцией при $\operatorname{Im} z>0$.

Из теоремы 2 получаем следующий результат С. Надя — Фояша.

Теорема ([1]). *Для того чтобы м. д. оператор B с вещественным спектром был подобен самосопряженному, необходимо и достаточно выполнения любого из двух условий:*

$$\sup_{\operatorname{Im} z>0}\{\operatorname{Im} z\|(B-z I)^{-1}\|\}<\infty, \tag{14}$$

$$\sup_{\operatorname{Im} z>0}\|W_B^{-1}(z)\|=\sup_{\operatorname{Im} z<0}\|W_B(z)\|<\infty. \tag{15}$$

При этом простая часть оператора B подобна самосопряженному оператору с абсолютно непрерывным спектром.

Доказательство. Необходимость условий (14) и (15) очевидна, а их эквивалентность, отмеченная впервые в [2, 3], элементарна и следует, например, из равенства

$$\|W_B(\bar{z})\|^2=\|I+2 i \operatorname{Im} z(B-z I)^{-1}\|^2=1+4 \operatorname{Im} z\|V^{1/2} R_B(z)\|^2. \tag{16}$$

Достаточность условия (14) — прямое следствие теоремы 2, ибо условие (2) для м. д. оператора выполняется с константой $C_-=\pi$. Установим последнюю часть теоремы. Пусть оператор B прост. Так как $Q^{-1} B Q=T=T^*$, то $-i Q^*(B-B^*) Q=+i[T, Q^* Q]=K^2 \geqslant 0$. По теореме Като [13] K будет T-гладким и, следовательно (см. [13, теорема 5.8]), $Kf=0 \ \forall f \in H_-$

$\forall g \in QH_s$ и, значит, $QH_s = 0$, ибо B — простой. Итак, $H_s = 0$ и теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Попутно установлено также, что в случае простого оператора B и $QBQ^{-1} = T = T^*$ спектр операторов Q^*Q и QQ^* абсолютно непрерывный. Этот факт, по-видимому, ранее не отмечался.

Т е о р е м а 3. *Пусть $B = G + iV$ — м. д. оператор. Следующие условия эквивалентны:*

1) *оператор B подобен самосопряженному;*
2) *операторы B и B^* подобны;*
3) $(-iB)$ — *генератор полугруппы класса C_0 и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} e^{-itB} f \|^2 \, dt \leqslant C_1 \| f \|^2$;
4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_B(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant C_2 \| f \|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in H$;
5) $\| V^{1/2} R_B(\lambda + i\varepsilon) \| \leqslant (C_2/\pi\varepsilon)^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства $\| e^{-itB} f \|^2 = \int\limits_0^t (e^{isB^*} V e^{-isB} f, f) \, ds + \| f \|^2$ с учетом критерия С. Надя [8] и неотрицательности оператора следует эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3). Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Так как $(-iA)$ и $(-iA^*)$ — генераторы полугрупп сжатий e^{-itA}, $t \geqslant 0$ и e^{-itA^*}, $t \leqslant$ соответственно, то импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из критерия С. Надя [8 Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из соотношения

$$V^{1/2} R(\lambda + i\varepsilon) f = \int\limits_0^{\infty} e^{i(\lambda + i\varepsilon)t} V^{1/2} e^{-itA} f dt$$

и равенства Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R(\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda = 2\pi \int\limits_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t} \| V^{1/2} e^{-itA} f \|^2 dt. \qquad (1$$

Импликация 4) $\Rightarrow$ 3) могла бы быть получена столь же просто, если бы м располагали прямым доказательством того, что при условии 4) операт $(-iA)$ — генератор полугруппы типа нуль. Импликация 4) $\Rightarrow$ 5) очевидн а импликация 5) $\Rightarrow$ 1) следует из равенства (16). Впрочем, импликация 4) $\Rightarrow$ 1) будет установлена в теореме 4 в более общей ситуации.

З а м е ч а н и е 2. Эквивалентности 2) $\Leftrightarrow$ 1) и 3) $\Leftrightarrow$ 1) установлены [4, теорема 4.2] для операторов с вполне непрерывной мнимой компоненто Эквивалентность условий 1) и 4) отмечена в [14]. Ниже предлагается прост доказательство теоремы М. Г. Крейна [2, 3].

Т е о р е м а ([2, 3]). *Для того чтобы м. д. оператор $B = G + i$ $V \in [H]$, с вещественным спектром был подобен самосопряженному, необх димо и достаточно, чтобы существовало непрерывное слева ортогональн разложение единицы $P(t)$, разделяющее его спектр, и оператор-функц $V^{1/2} P(t) V^{1/2}$ удовлетворяла условию Липшица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B подобен самосопряженно $Q^{-1}BQ = T = T^*$. Из условия 3) предыдущей теоремы получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} Q e^{-itT} f \|^2 dt \leqslant \| Q \|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} e^{-itB} f \|^2 dt \leqslant C_1 \| Q \|^2 \| f \|^2,$$

т. е. оператор $V^{1/2}Q$ является T-гладким (см. [13]). Но одно из эквивале ных условий T-гладкости следующее: $\| V^{1/2} Q (E_{t_2} - E_{t_1}) \|^2 \leqslant (2\pi)^{-1} C_1 \| Q \|^2 \times | t_2 - t_1 | \, \forall t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$, где E_t — спектральная функция опера ра T. Но последнее условие эквивалентно, как легко видеть, оцен $\| V^{1/2} (F_{t_2} - F_{t_1}) \|^2 \leqslant C_3 | t_2 - t_1 | \, \forall t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$, где $F_t = Q E_t Q^{-1}$ —

сая спектральная функция оператора B. Аналогично из неравенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} e^{-itA^*} f \|^2 \, dt \leqslant C_1 \| f \|^2$ получим

$$\| V^{1/2} (F_{t_2}^* - F_{t_1}^*) \|^2 = \| (F_{t_2} - F_{t_1}) V^{1/2} \|^2 \leqslant C_3 | t_2 - t_1 |. \tag{18}$$

Из (18) легко следует (см., напр., [2, с. 52]) нужная оценка $\| V^{1/2} (P_{t_2} - P_{t_1}) V^{1/2} \| = \| (P_{t_2} - P_{t_1}) V^{1/2} \|^2 \leqslant C_3 | t_2 - t_1 |$ для спрямленной спектральной функции $P_t = P_t^*$, $P_t H = F_t H$, чем и доказана необходимость. Доказательство достаточности опускается из-за недостатка места.

4. Достаточные условия подобия недиссипативного оператора самосопряженному. Рассмотрим операторы вида

$$A = G + iV_1 = G + iJV, \tag{19}$$

где $G = G^*$, V_1 — самосопряженный оператор с полярным представлением: $V_1 = JV = V^{1/2} J V^{1/2}$. Здесь $V = V^*$ — неотрицательный, а $J = P_+ - P_-$, где $P_\pm = (I + J)/2$.

Для корректности определения считаем, как и в п. 3, оператор V сильно G-ограниченным, т. е. $D(G) \subset D(V)$ и справедливо неравенство (13). Пусть $E = \overline{R(V)}$. Характеристическая функция $\theta(z) : E \to E$ оператора A вида (19) определяется формулой $\theta(z) = I + 2iJV^{1/2} (A^* - ZI)^{-1} V^{1/2}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Следующая лемма доказана в [15] с использованием самосопряженной дилатации диссипативного оператора. Здесь предлагается элементарное ее доказательство.

Лемма ([15]). *Пусть $B = G + iV$ — м. д. оператор, удовлетворяющий условию* (13). *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_B (\lambda - i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda \leqslant 2\pi \| f \|^2. \tag{20}$$

Доказательство. Так как B — м. д. оператор, то $(-iB)$ — генератор полугруппы e^{-itB}, $t \leqslant 0$, сжатий. Пользуясь соотношением (7) и равенствами Парсеваля (17) и (8), найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_B (\lambda - i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\varepsilon t} \| V^{1/2} e^{-itB} f \|^2 \, dt =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\varepsilon t} (e^{itB^*} V e^{-itB} f, f) \, dt = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\varepsilon t} \frac{d}{dt} (e^{itB^*} e^{-itB} f, f) \, dt =$$

$$= 2\pi (e^{2\varepsilon t} \| e^{-iBt} f \|^2) \Big|_{-\infty}^{0} - 4\pi\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\varepsilon t} \| e^{-iBt} f \|^2 \, dt =$$

$$= 2\pi \| f \|^2 - 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_B (\lambda - i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Неравенство (20) сразу же следует из равенства (17) и включения $\varphi(s) = \| V^{1/2} e^{-isB} f \| \in L_2(-\infty, 0)$. Однако в приведенном доказательстве попутно установлено полезное тождество (см. [15])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_B (\lambda - i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda = 2\pi \| f \|^2 - 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_B (\lambda - i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda.$$

Если $(-iB)$ — генератор группы $U(t) = \exp(-itB)$, $t \in (-\infty, \infty)$, типа нуль, то $\forall \varepsilon > 0$ справедливо тождество $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_B (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 \, d\lambda =$

$= -2\pi \| f \|^2 + 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_B (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda$, устанавливаемое аналогично. Из него, в частности, следует, что для м. д. оператора в неравенстве (1) $C_+ \geqslant \pi$, причем $C_+ = \pi$ только в случае, если A самосопряжен.

Теорема 4. *Пусть A — оператор вида (19) с вещественным спектром. Для его подобия самосопряженному достаточно выполнения любого из следующих условий:*

1) $(-iA)$ — *генератор группы* e^{-itA}, $-\infty < t < +\infty$, *типа* C_0 *и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} e^{-itA} f \|^2 dt \leqslant C_1 \| f \|^2$;

2) $\| V^{1/2} R_A (\lambda + i\varepsilon) f \|_{H_2^+(E)} \leqslant C_2 \| f \|$, $\quad \| V^{1/2} R_{A^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|_{H_2^+(E)} \leqslant C_2^* \| f \|$;

3) $\| \theta (\lambda \pm i\varepsilon) \| \leqslant C_3^+ \ \forall \varepsilon > 0$.

При этом простая часть оператора A подобна самосопряженному с абсолютно непрерывным спектром.

Доказательство. Достаточность условия 1) легко извлекается из критерия С. Надя [8] и соотношений

$$\| e^{-itA} f \|^2 = \| f \|^2 + \int\limits_0^t (J V^{1/2} e^{-isA} f,\ V^{1/2} e^{-isA} f)\, ds = \| f \|^2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \| P_+ V^{1/2} e^{-isA} f \|^2 ds - \int\limits_0^t \| P_- V^{1/2} e^{-isA} f \|^2 ds \leqslant \| f \|^2 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} e^{-isA} f \|^2 ds.$$

Если $(-iA)$ — генератор группы типа нуль, то так же, как в теореме 3, достаточность условия 2) следует из равенства (17) и теоремы Фату.

Для доказательства в общем случае заметим, что при $\varepsilon > 0$ оценки $\| V^{1/2} R_B (\lambda - i\varepsilon) \| = \| R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) V^{1/2} \| \leqslant (2/\varepsilon)^{1/2}$ являются простым следствием неравенства (20) для м. д. оператора $B = G + iV$. Учитывая их, получим:

$$\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_A (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda +$$

$$+ 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| [R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) - R_A (\lambda + i\varepsilon)] f \|^2 d\lambda = 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda +$$

$$+ 2\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| 2i R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) V^{1/2} P_+ V^{1/2} R_A (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant 2\pi \| f \|^2 +$$

$$+ 16 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_A (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant (2\pi + 16 C_2^+) \| f \|^2.$$

Аналогично устанавливается неравенство $\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| R_{A^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant (2\pi + 16 C_2^*) \| f \|^2$, и доказательство завершается ссылкой на теорему 1.

Для доказательства достаточности условия 3) установим импликацию 3) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\| \theta (\lambda + i\varepsilon) \| \leqslant C^+$. Тогда $\| V^{1/2} R_{A^*} (\lambda + i\varepsilon) V^{1/2} \| \leqslant (C_3^+ + 1)/2$. Поэтому с учетом леммы получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_{A^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda \leqslant 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon) f \|^2 d\lambda +$$

$$+ 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2} [R_{A^*} (\lambda + i\varepsilon) - R_{B^*} (\lambda + i\varepsilon)] f \|^2 d\lambda = 4\pi \| f \|^2 +$$

$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty} \| 2iV^{1/2}R_{A^*}(\lambda + i\varepsilon) V^{1/2}P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon) f\|^2 d\lambda \leqslant 4\pi \| f\|^2 +$$

$$+ 2(C_3^+ + 1)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon) f\|^2 d\lambda \leqslant 4\pi [(C_3^+ + 1)^2 + 1]\| f\|^2.$$

Аналогично условие $\|\theta(\lambda - i\varepsilon)\| \leqslant C_3^-$ влечет неравенство $\int_{-\infty}^{+\infty} \| V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon) f\|^2 d\lambda \leqslant 4\pi [(C_3^- + 1)^2 + 1]\| f\|^2$.

Итак, подобие самосопряженному оператору, т. е. равенство $Q^{-1}AQ = T = T^*$, установлено во всех трех случаях. Из условия 2) следует, что оператор $Q^*V^{1/2}Q$ будет T-гладким в смысле Като [13] и потому $Q^*V^{1/2}Qf = 0 \Rightarrow V^{1/2}Qf = 0$ $\forall f \in H_s$, где H_s — сигнулярное подпространство оператора T, и, следовательно, $Af = A^*f$ $\forall f \in QH_s$. Поэтому, если оператор A прост, то $H_s = 0$ и спектр оператора T абсолютно непрерывный. При условии 3) последнее утверждение следует из 3) $\Rightarrow$ 2), а при условии 1) из эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 2). Действительно, в процессе доказательства попутно установлено, что каждое из условий 1) и 2) достаточно для того, чтобы $(-iA)$ был генератором группы типа нуль. Поэтому эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) следует, как и в теореме 3, из соотношений (7) и равенства Парсеваля (17). Теорема доказана.

Замечание 4. Прямым следствием условия 2) являются неравенства $\|V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)\| = \|R_{A^*}(\lambda \mp i\varepsilon)V^{1/2}\| \leqslant (C_2^{\pm}/\pi\varepsilon)^{1/2}$, из которых в силу равенства $4\operatorname{Im} zV^{1/2}R_A(\bar z)R_{A^*}(z)V^{1/2} = J - \theta_A^*(z)J\theta_A(z)$ следует оценка $\|\theta_A^*(\lambda \pm i\varepsilon) \times J\theta_A(\lambda \pm i\varepsilon)\| \leqslant 1 + 4C_2^{\pm}C_2^{\mp}/\pi$. Однако импликация 2) $\Rightarrow$ 3) в общем случае, по-видимому, не верна.

Замечание 5. Достаточность условия 3) для подобия самосопряженному оператору составляет содержание известной теоремы Сахновича [5, 6]. Из условий 2) легко следуют неравенства $C^{\pm}\|f\| \geqslant \|V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)f\|_{H_2^{\pm}(F)}$, наличия которых все же не достаточно для подобия самосопряженному оператору. Но, как отмечено в [14], эти неравенства дают критерий подобия при дополнительном ограничении: $\max\{\|P_-W_B(z)P_+\|, \|P_+W_A(z)P_-\|\} \leqslant 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

5. Условия подобия унитарному оператору. Все полученные результаты легко переносятся на операторы, подобные унитарным, причем доказательства упрощаются. Приведем лишь формулировки аналогов теорем 1 и 2, опуская доказательства из-за недостатка места.

Теорема 5. *Для того чтобы ограниченный оператор B с унитарным спектром был подобен унитарному, необходимо и достаточно выполнения с некоторыми константами C и C^* следующих неравенств:*

$$(1 - |\xi|)\int_0^{2\pi} \|(B - |\xi| e^{it})^{-1} f\|^2 dt \leqslant C\|f\|^2, \quad |\xi| < 1, \quad f \in H, \tag{21}$$

$$(|\xi| - 1)\int_0^{2\pi} \|(B^* - |\xi| e^{it})^{-1} f\|^2 dt \leqslant C^*\|f\|^2, \quad |\xi| > 1, \quad f \in H. \tag{22}$$

Следствие. *Пусть выполняется условие* (21) *и аналогичное условие*

$$(1 - |\xi|)\int_0^{2\pi} \|(B^* - |\xi| e^{it})^{-1} f\|^2 dt \leqslant C\|f\|^2, \quad |\xi| < 1, \quad f \in H, \tag{23}$$

для оператора B^*. Тогда оператор B подобен унитарному ***если и только если***

$$(|\xi| - 1)\|(B - \xi)^{-1}\| < \infty, \quad |\xi| > 1. \tag{24}$$

Замечание 6. Из приведенного следствия легко следует теорема 1. Действительно, оценка (21) для $B = (A - i)(A + i)^{-1}$ и аналогичная оценка (23) для B^* следуют из (1) и (4) в силу неравенств $r\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{it})|^2\,dt \leqslant$

$\leqslant 4\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda \pm i\varepsilon)|^2\,d\lambda$ (см. [16, с. 182]), $1-r \leqslant 4\varepsilon$, в которых $\varepsilon = (1-r)(3+r)^{-1}$, $g(\xi) = f(z_\pm)$, $z_\pm = \lambda \pm i\varepsilon$, $\xi = (z_+ - i)(z_+ + i)^{-1} = (z_- + i)(z_- - i)^{-1}$. Далее, неравенство $\varepsilon\|R_A(\lambda - i\varepsilon)\| \leqslant C$, $\varepsilon > 0$, вытекающее из (2), эквивалентно в силу тождества $\|I + 2i\varepsilon(A-z)^{-1}\| = \|-\bar{\xi}I - (|\xi|^2 - 1)(B-\xi)^{-1}\|$ неравенству (24).

В заключение отметим, что во время подготовки статьи к печати вышли работы [17, 18], в первой из которых иначе доказаны теоремы 1 и 5, а во второй содержатся близкие к этим теоремам результаты.

1. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 431 с.
2. *Крейн М. Г.* Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным.— Функц. анализ и его прилож., 1967, **1**, № 1, с. 38—50.
3. *Крейн М. Г.* Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.— Тр. Международного конгресса математиков.— М. : Мир, 1968, с. 189—216.
4. *Сахнович Л. А.* Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром.— Тр. Моск. мат. общ-ва, 1968, **19**, с. 211—270.
5. *Сахнович Л. А.* Операторы, подобные унитарным с абсолютно непрерывным спектром.— Функц. анализ и его прилож., 1968, **2**, № 1, с. 51—63.
6. *Сахнович Л. А.* Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, **33**, № 1, с. 52—64.
7. *Хилле Е., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
8. *Sz.-Nagy B.* On uniformly founded linear transformations in Hilbert space.— Acta Sci. Math. Szeged, 1947, **11**, p. 152—157.
9. *Постников А. Г.* Тауберова теория и ее применения.— М. : Наука. 1979.— 148 с.— (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова/АН СССР; Т. 144).
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб.,1977, **102**, № 1, с. 124—150.
11. *Березанский Ю. М.* Некоторые применения пространств с отрицательной нормой.— Studia Math. Ser. Specjalna, 1963, **1**, с. 25—26.
12. *Горбачук В. И., Федорова Л. Б.* Об операционном исчислении для некоторых классов несамосопряженных операторов.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 1, с. 123—131.
13. *Kato T.* Wave operators and similarity for some non-self-adjoint operators.— Math. Ann., 1966, **162**, p. 258—279.
14. *Набоко С. Н.* Об отделимости спектральных компонент несамосопряженного оператора.— Докл. АН СССР, 1978, 239, № 5, с. 1052—1055.
15. *Набоко С. Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1980, **147**, с. 86—114.
16. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 311 с.
17. *Набоко С. Н.* Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам.— Функц. анализ и его прилож., 1984. **18**, № 1, с. 16—27.
18. *Casteren J. A. van* Operators similarto unitary of selfadjoint ones.— Pacific J. Math., 1983, **104**, N 1, p. 241—255.

Донецк. политехн. ин-т

Поступила 04.06.83
после доработки — 08.12.83