УДК 517.53,57.511

*В. П. Бурлаченко*

# О представлении функций, заданных некоторыми рядами Дирихле, и об оценке функции Чебышева

Рассмотрим в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, $s = \sigma + it$, различные ряды Дирихле

$$\sum_n a_n/n^s. \tag{1}$$

Для случая, когда $a_n = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ряд (1) представляет собой $\zeta$-функцию Римана $\zeta(s)$, для которой в [1] с помощью двойного ряда получено аналитическое продолжение с полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$ с выделением простого полюса в точке $s = 1$.

В случае $a_n = (\ln n)^{-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, получаем ряд Дирихле, определяющий в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ функцию $\zeta_1(s) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} 1/n^s \ln n$.

При помощи развитого в [1] метода в [2] для этой функции установлен следующий результат.

Теорема 1. *Функция $\zeta_1(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ допускает представление*

$$\zeta_1(s) = -\ln(s-1) + \varphi(s) + \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot a_{k,n+1}(s)}{(k+1)!\,(n+1)^{s+k} \cdot \ln(n+1)}, \tag{2}$$

$a_{k,n+1}(s) = u_k(s) + u_k'(s)/\ln(n+1) + \ldots + u_k^{(k)}(s)/\ln^k(n+1)$, $u_k(s) = s(s+1)\ldots$ $\ldots(s+k-1)$, $\varphi(s) = \int\limits_1^{(s-1)\ln 2} (1-e^{-t})\,dt/t + C$, $C = -\ln\ln 2 + \int\limits_1^{\infty} dt/te^t = \text{const}$.

Представление (2) является также аналитическим продолжением функции $\zeta_1(s)$ с полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$ с выделением логарифмического полюса в точке $s = 1$.

Особый интерес представляет ряд (1) при $a_n = 1$, если $n$ — простое число, и $a_n = 0$, если $n$ — не простое число. В этом случае получаем ряд Дирихле по всем простым числам $p$:

$$\sum_p 1/p^s = : f(s). \tag{3}$$

Известно [3, с. 93], что для функции $f(s)$ в случае действительных $s > 1$ справедливо равенство $(s \to 1 + 0)$

$$f(s) = -\ln(s-1) - \gamma + a + o(1), \tag{4}$$

где $a$ — постоянная и $\gamma$ — постоянная Эйлера.

Сравнивая (2) и (4), замечаем, что в окрестности справа точки $s = 1$ функции $\zeta_1(s)$ и $f(s)$ в известном смысле ведут себя аналогично. Однако получить для функции $f(s)$ представление в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, аналогичное представлению (2), не удается.

Из результатов Чебышева [4, с. 50] следует, что поведение ряда (3) в случае действительных $s$ тесно связано с функцией $\psi(x) = \sum\limits_{m \geqslant 1} \sum\limits_{p^m \leqslant x} \ln p$, введенной Чебышевым, которая удовлетворяет, как показал Чебышев, для всех $x \geqslant 1$ функциональному уравнению

$$\psi(x) + \psi(x/2) + \ldots + \psi(x/n) + \ldots = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots [x]), \tag{5}$$

где $[x]$ — целая часть $x$.

Так как $\psi(x) = 0$ при $x < 2$, то ряд слева в (5) при каждом фиксированном $x \geqslant 1$ имеет конечное число слагаемых.

Известна [3] оценка для функции Чебышева

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-c\sqrt{\ln x})), \quad c > 0, \quad x \to \infty,$$

но эта оценка не окончательная. Если предположить, что гипотеза Римана о нулях $\zeta$-функции верна, то $\psi(x) = x + O(\sqrt{x}\ln^2 x)$, $x \to \infty$.

Для функции Чебышева $\psi(x)$ справедливо следующее.

Теорема 2. *Имеет место равенство* ($\gamma$ — постоянная Эйлера):

$$\psi(x) = x - \ln x - 1/x - \gamma + 1/2 - r(x) \qquad \forall x \geqslant 1, \tag{6}$$

*где* $r(x) = x - \ln x - 1/x - \gamma + 1/2$ $\forall x \in [1, 2)$, *а для всех натуральных* $x > 1$ *функция* $r(x)$ *удовлетворяет функциональному уравнению* $r(x) + r(x/2) + r(x/3) + \ldots + r(1) = -\theta/12x$, $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Легко видеть, что $\psi(x) = 0$ $\forall x \in [1, 2)$. Однако ради удобства будем считать, что в уравнении (5) ряд слева обрывается лишь после члена $\psi(x/n)$, где $n \geqslant x$, если $x$ — целое число. В таком случае, подставляя (6) в (5), получаем при любом натуральном $x$:

$$x(1 + 1/2 + \ldots 1/x) - \ln(x \cdot x/2 \ldots x/x) - (1/x + 2/x + \ldots + x/x) - \gamma x + x/2 - \\ - \sum_{k=1}^{x} r(x/k) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x).$$

Отсюда, используя соотношение из [5, с. 793] $1 + 1/2 + \ldots + 1/n = \ln n + \gamma + 1/2n - \theta/12n^2$, $0 < \theta < 1$, находим:

$$x(\ln x + \gamma + 1/2x - \theta/12x^2) - x\ln x + \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x) - 1/x \cdot x + 1/2 \cdot x - \gamma x + \\ + x/2 - \sum_{k=1}^{x} r(x/k) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x).$$

После упрощений отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Отметим в заключение, что в случае $s = 1$, следуя методу доказательства теоремы 1 и принимая во внимание известный результат [3, с. 93], получаем следствие.

Следствие. *Для всех простых чисел* $p \leqslant n$ *имеет место равенство*

$$\sum_{p \leqslant n} 1/p = \sum_{k=2}^{n} 1/k \ln k + a + O(\exp(-c\sqrt{\ln n})), \quad c > 0, \tag{7}$$

где

$$a = \ln\ln 2 + \gamma - \sum_{p}\sum_{m \geqslant 2} 1/mp^m - \sum_{k=1}^{\infty}(1/k\ln k - \ln(\ln(k+1)/\ln k)).$$

Асимптотическое равенство (7) несет дополнительную информацию о распределении простых чисел в натуральном ряде, будучи более сильным результатом, чем известное асимптотическое равенство $p_n \sim n \ln n$, где $p_n$ — $n$-е по порядку простое число.


1. *Бурлаченко В. П.* Об одном способе аналитического продолжения дзета-функции Римана.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 2, с. 238—243.
2. *Бурлаченко В. П.* Про логарифмічний полюс однієї аналітичної функції.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1973, № 2, с. 102—104.
3. *Прахар К.* Распределение простых чисел.— М. : Мир, 1967.— 512 с.
4. *Чебышев П. Л.* Избранные труды. М. : Изд-во АН СССР, 1955.— 926 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II.— М. : Наука, 1966.— 800 с.


Полтав. пед. ин-т

Поступила 20.01.84