УДК 519.21

Е. А. Абжанов, Ю. В. Козаченко

Некоторые свойства случайных процессов в банаховых K_σ-пространствах

В работе получены условия выборочной непрерывности, ограниченности супремума, условия слабой сходимости случайных процессов, принадлежащих банаховым K_σ-пространствам.

Показано, что энтропийные методы, используемые ранее для гауссовских и некоторых других процессов [1, 2], могут применяться для достаточно широкого класса случайных процессов.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{B}, P\}$ — стандартное вероятностное пространство, B — банахово, K_σ — пространство [3, с. 377] случайных величин $\xi(\omega)$, определенных на $\{\Omega, \mathfrak{B}, P\}$, $\|\cdot\|$ — норма в этом пространстве. Напомним, что банахово пространство случайных величин будет K_σ-пространством, если: для ξ и η из B $\max(\xi, \eta) \in B$ и $\min(\xi, \eta) \in B$ и для любого счетного набора $\xi_n \in B$ такого, что $\sup\limits_n |\xi_n| < \eta \in B$, $\sup\limits_n |\xi_n|$ также принадлежит B. Норма в K_σ-пространстве обладает свойством: если $|\xi| \leqslant |\eta|$, то $\|\xi\| \leqslant \|\eta\|$. Заметим также, что случайные величины такие, что $P\{\xi \neq \eta\} = 0$, отождествляются.

Определение 1. *Назовем положительную монотонно неубывающую функцию* $x(n)$, $n \in N^+$, *характеристикой банахова* K_σ*-пространства* B, *если для любых* $\xi_k \in B$, $k = \overline{1, n}$, *справедливо неравенство* $\|\sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k|\| \leqslant x(n) \sup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\xi_k\|$.

Очевидно, что функция $x(n) = n$ будет характеристикой любого банахова K_σ-пространства. Приведем примеры пространств, обладающих характеристикой, отличной от тривиальной. Легко видеть, что для пространств $L^p(dP(\omega))$, $p \geqslant 1$, характеристикой будет функция $x(n) = n^{1/p}$. В работе [2] показано, что для пространств Орлича с нормой Люксембурга, порожденных N-функцией $U(x)$ [4, с. 16] из класса E [2] характеристикой будет функция $x(n) = CU^{(-1)}(n)$, где $U^{(-1)}(x)$ — функция, обратная к $U(x)$ при $x > 0$. Используя метод работы [2], легко также найти нетривиальную характеристику любого конкретного пространства Орлича.

В дальнейшем нам понадобится лемма, которая является простым обобщением, в рассматриваемом случае, теоремы VII.21 из книги [5, с. 196].

Лемма. *Пусть* $\{\xi_n^m\}$, $n = \overline{1, \infty}$, $m = \overline{1, \infty}$, *счетный набор последовательностей случайных величин из* B; ξ_m — *случайные величины из* B.

Если $\sup\limits_m \|\xi_n^m - \xi_m\| = c_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\sup_m P\{|\xi_n^m - \xi_m| > \varepsilon\} \to 0 \tag{1}$$

при $n \to \infty$.

Доказательство леммы. Не уменьшая общности, можно предполагать, что $\xi_m = 0$. Покажем, что из любой подпоследовательности $\xi_{n_k}^{m_k}$ последовательности ξ_n^m можно выделить подпоследовательность $\xi_{n_k'}^{m_k'}$ такую, что $\xi_{n_k'}^{m_k'} \to 0$ при $k \to \infty$ с вероятностью единица. Действительно, существует подпоследовательность $c_{n_k'}$ последовательности c_{n_k} такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n_k'} k < \infty$. Рассмотрим случайную величину $|\xi| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{n'_k}^{m'_k}| k$, $\xi \in B$, так как $\|\xi\| \leqslant \sum_k \|\xi_{n'_k}^{m'_k} k\| \leqslant \sum_k c_{n'_k} k < \infty$. Из того, что $|\xi_{n'_k}^{m'_k}| k < |\xi|$, следует, что с вероятностью единица $|\xi_{n'_k}^{m'_k}| \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим теперь, что (1) не выполняется. Это значит, что существуют такие последовательности n_k, m_k, что для некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ при всех n_k, m_k выполняется $P\{|\xi_{n_k}^{m_k}| > \varepsilon\} > \delta$, а это противоречит тому, что из $\xi_{n_k}^{m_k}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к нулю с вероятностью единица. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\xi_n \in B$ — такая последовательность, что $\|\xi_n - \xi\| \to 0$ при $n \to \infty$, тогда $\xi_n \to \xi$ по вероятности при $n \to \infty$.*

Определение 2. *Пусть T — некоторое параметрическое множество. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, будем называть процессом, принадлежащим банаховому K_σ-пространству B $(\xi(t) \in B)$, если при каждом $t \in T$ случайная величина $\xi(t) \in B$.*

Пусть $\xi(t) \in B$. Введем на множестве T псевдометрику $\rho(t, s)$ следующим образом: $\rho(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|$. $\rho(t, s)$ не будет метрикой, так как из $\rho(t, s) = 0$, вообще говоря, не следует, что $t = s$.

Предположим, что пространство (T, ρ) — компакт, а $\xi(t)$ — сепарабелен.

Случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен по норме на (T, ρ). Поэтому в силу следствия к лемме $\xi(t)$ непрерывен по вероятности на (T, ρ). Отсюда следует, что в качестве множества сепарабельности процесса $\xi(t)$ можно брать любое счетное всюду плотное множество в (T, ρ).

Обозначим $N(\varepsilon)$ — число элементов в минимальном покрытии пространства (T, ρ) шарами радиуса ε. Множество центров шаров этого покрытия обозначим V_ε. Пусть $\varepsilon_k = \varepsilon_0 2^{-k}$, $\varepsilon_0 = \sup_{t,s \in T} m(t, s)$. Любое из множеств $V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$, $n = 0, 1, \ldots$, можно рассматривать как множество сепарабельности процесса $\xi(t)$.

Определение 3. *Отображение $\alpha_n(t)$ вводится следующим образом: каждой точке $t \in V_0$ ставим в соответствие единственную точку $\alpha_n(t) \in V_{\varepsilon_n}$ так, что $\rho(t, \alpha_n(t)) < \varepsilon_n$. Если $t \in V_{\varepsilon_n}$, то $\alpha_n(t) = t$.*

Замечание. В силу того, что V_{ε_n} — ε_n-сеть, то $\alpha_n(t)$ всегда существует. Если существует несколько таких точек, то выбираем одну из них и фиксируем.

Теорема 1. *Пусть $\xi(t) \in B$ — сепарабельный случайный процесс на (T, ρ). Пусть выполняется условие*

$$\int_0^{\varepsilon_0} x(N(u))\, du < \infty. \tag{2}$$

Тогда 1) $\sup_{t \in T} |\xi(t)| \in B$ *и*

$$\|\sup_{t \in T} |\xi(t)|\| \leqslant \sup_{t \in T} \|\xi(t)\| + 4 \int_0^{\varepsilon_0} x(N(u))\, du; \tag{3}$$

2) $\|\sup_{\rho(t,s) < \varepsilon} |\xi(t) - \xi(s)|\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$

и процесс $\xi(t)$ выборочно непрерывен на (T, ρ) с вероятностью единица.

Доказательство теоремы. В силу сепарабельности процесса $\xi(t)$ с вероятностью единица $\sup_{t \in T} |\xi(t)| = \sup_{t \in V_0} |\xi(t)|$. Пусть t — произвольная точка из V_0. Ясно, что t принадлежит некоторому V_{ε_s}. Обозначая $u_{s-1} = \alpha_{s-1}(t)$, $u_{s-2} = \alpha_{s-2}(u_{s-1})$, $\ldots$, $u_0 = \alpha_0(u_1)$, получаем

$|\xi(t)| \leqslant |\xi(t) - \xi(u_{s-1})| + |\xi(u_{s-1}) - \xi(u_{s-2})| + \ldots + |\xi(u_1) - \xi(u_0)| + |\xi(u_0)| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k+1}}} |\xi(t) - \xi(\alpha_k(t))| + \xi(u_0).$$

Так как t — произвольная точка из V_0, то из последнего неравенства получаем

$$\sup_{t \in T} |\xi(t)| \leqslant \sup_{t \in V_0} |\xi(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k+1}}} |\xi(t) - \xi(\alpha_k(t))| + |\xi(u_0)|.$$

Следовательно, учитывая, что V_{ε_0} содержит только одну точку, получаем

$$\|\sup_{t \in T} |\xi(t)|\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\sup_{t \in V_{\varepsilon_{k+1}}} |\xi(t) - \xi(\alpha_k(t))|\| + \sup_{t \in T} \|\xi(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} x(N(\varepsilon_{k+1})) \sup_{t \in V_{\varepsilon_{k+1}}} \|\xi(t) - \xi(\alpha_k(t))\| + \sup_{t \in T} \|\xi(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} x(N(\varepsilon_0 2^{-(k+1)})) \varepsilon_0 2^{-k} + \sup_{t \in T} \|\xi(t)\| \leqslant 4 \int_0^{\varepsilon_0} x(N(u))\, du + \sup_{t \in T} \|\xi(t)\|.$$

Таким образом, утверждение 1) теоремы 1 доказано. Докажем теперь утверждение 2). При доказательстве используем метод работы [6].

Пусть задано некоторое ε_k; t_k^i, $i = \overline{1, N(\varepsilon_k)}$, — центры шаров минимального ε_k-покрытия (T, ρ). Введем множества $E_k^i \in V_k$ следующим образом. Пусть $t \in V_{\varepsilon_m}$, $m \geqslant k$. Рассмотрим отображения $t_{m-1}(t) = \alpha_{m-1}(t)$, $t_{m-2}(t) = \alpha_{m-2}(\alpha_{m-1}(t))$ и т. д. При этом в конце концов точка t отобразится в одну из точек t_k^i, $t_k^i = t_k(t)$. Будем считать, что $t \in V_k$ принадлежит E_k^i, если $t_k(t) = t_k^i$. Ясно, что $V_k = \bigcup_i E_k^i$, $E_k^i \cap E_k^j = \varnothing$, $i \neq j$. Обозначим d — минимальное расстояние между теми множествами E_k^i, расстояние между которыми положительно. Пусть теперь t и s — такие точки из V_k, что $\rho(t, s) < d$. Из определения d ясно, что t и s принадлежат одному из множеств E_k^i либо двум таким множествам E_k^i и E_k^j, расстояние между которыми равно нулю. Во втором случае существуют такие последовательности $x_i^n \in E_k^i$ и $x_j^n \in E_k^j$, что $\rho(x_i^n, x_j^n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\|\xi(x_i^n) - \xi(x_j^n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Из следствия к лемме вытекает, что существуют также подпоследовательности $\xi(x_i^{n_k})$ и $\xi(x_j^{n_k})$, что $|\xi(x_i^{n_k}) - \xi(x_j^{n_k})| \to 0$ при $n_k \to \infty$ с вероятностью единица. Поэтому переходя к пределу при $n_k \to \infty$ в неравенстве

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leqslant |\xi(t) - \xi(x_i^{n_k})| + |\xi(x_j^{n_k}) - \xi(t)| \leqslant \sup_{t,s \in E_k^i} |\xi(t) - \xi(s)| +$$

$$+ |\xi(x_i^{n_k}) - \xi(x_j^{n_k})| + \sup_{t,s \in E_k^j} |\xi(t) - \xi(s)|,$$

получим, что при всех t, $s \in V_k$, $\rho(t, s) < d$

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leqslant 2 \sup_i \sup_{t,s \in E_k^i} |\xi(t) - \xi(s)|. \tag{4}$$

Пусть теперь $t, s \in E_k^i$. Для определенности положим $t \in V_{\varepsilon_m}$, $s \in V_{\varepsilon_p}$, $m \geqslant k$, $p \geqslant k$. Тогда легко видеть, что

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leqslant |\xi(t) - \xi(t_{m-1}(t))| + \sum_{s=k}^{m-1} \xi(t_{s+1}(t)) - \xi(t_s(t))| +$$

$$+ |\xi(s) - \xi(t_{p-1}(t))| + \sum_{s=k}^{p-1} |\xi(t_{s+1}(t) - \xi(t_s(t))| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{s=k}^{\infty} \sup_{x \in V_{\varepsilon_{k+1}}} |\xi(x) - \xi(\alpha_s(x))|.$$

Отсюда и из (4), учитывая сепарабельность процесса $\xi(t)$, получаем

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant d} |\xi(t)-\xi(s)| \leqslant 4 \sum_{s=k}^{\infty} \sup_{x\in V_{\varepsilon_{s+1}}} |\xi(x)-\xi(\alpha_s(x))|.$$

Поэтому

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant d} |\xi(t)-\xi(s)|\| \leqslant 4 \sum_{s=k}^{\infty} \| \sup_{x\in V_{\varepsilon_{s+1}}} |\xi(x)-\xi(\alpha_s(x))|\| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{s=k}^{\infty} x(N(\varepsilon_{s+1}))\,\varepsilon_s \leqslant 16 \int_0^{\varepsilon_{k+1}} x(N(u))\,du.$$

Из последнего неравенства и из (2) легко получить (3). Из (3) легко получить, что $\xi(t)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица, так как следствие из леммы обеспечивает существование такой последовательности δ_n, что $\sup_{\rho(t,s)<\delta_n} |\xi(t)-\xi(s)| \to 0$ с вероятностью единица. Теорема доказана.

Заметим, что при некоторых ограничениях на функцию $x(n)$, точно так же, как в работе [2], можно получить оценки для $\| \sup_{\rho(t,s)\leqslant\varepsilon} |\xi(t)-\xi(s)\|$, находить модули непрерывности $\xi(t)$ и т. п. Можно также рассмотреть случай, когда T — конечномерное евклидово пространство, а метрика $\rho(t, s)$ связана с метрикой $|t-s|$ соотношением $\rho(t, s)\leqslant\sigma(|t-s|)$. В этом случае легко сформулировать условия теоремы 1 в терминах функции $\sigma(x)$. Рассмотрим последовательность $\xi_n(t)\in B$, $t\in T$, случайных процессов $\rho_n(t, s) = \|\xi_n(t)-\xi_n(s)\|$, $\rho(t, s) = \sup_n \rho_n(t, s)$. Предположим, что пространство (T, ρ) — компакт, а $\xi_n(t)\in C(T)$ — пространству непрерывных функций на (T, ρ). Приведем достаточные условия слабой сходимости $\xi_n(t)$ в $C(T)$. Пусть $N(\varepsilon)$ — число элементов в минимальном ε-покрытии (T, ρ).

Т е о р е м а 2. *Пусть конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)\in B$ из $C(T)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t)$. Для того, чтобы $\xi_n(t)$ слабо сходились к $\xi(t)$, достаточно, чтобы выполнялись условия*:

а) *для некоторого* $t_0\in T$ $\sup_n \|\xi_n(t_0)\| < C < \infty$;

б) $\int_0^{\varepsilon_0} x(N(u))\,du < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Прохорова [7], для слабой сходимости $\xi_n(t)$ в $C(T)$ достаточно, чтобы конечномерные распределения процессов $\xi_n(t)$ слабо сходились к конечномерным распределениям $\xi(t)$, а семейство мер $\mu_n(\cdot)$, индуцируемое последовательностью $\xi_n(t)$ на $C(T)$, было плотным на $C(T)$. Для плотности мер $\mu_n(\cdot)$ на $C(T)$ достаточно [8, с. 581], чтобы выполнялись условия:

а$_1$) существует $t_0\in T$ такое, что

$$\lim_{H_k\uparrow\infty} \sup_n P\{|\xi_n(t_0)| > H_k\} = 0;$$

б$_1$) для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h_k\downarrow 0} \sup_n P\{\sup_{\rho(t,s)\leqslant h_k} |\xi_n(t)-\xi_n(s)| > \varepsilon\} = 0.$$

Заметим теперь, что, дословно повторяя доказательство теоремы 1, можно показать, что $\sup_n \| \sup_{\rho(t,s)\leqslant h_k} |\xi_n(t)-\xi_n(s)|\| \to 0$ при $h_k\downarrow 0$. Поэтому из леммы следует, что выполняется б$_1$). Условие а$_1$) будет выполняться, если

$$\sup_n P\{|\eta_n^k| > 1\} \to 0 \tag{5}$$

при $k\to\infty$, где $\eta_n^k = \dfrac{\xi_n(t_0)}{H_k}$.

Но (5) выполняется в силу следствия к лемме, так как $\|\eta_n^k\| \leqslant \leqslant \frac{1}{H_k} \|\xi_n(t_0)\| \leqslant \frac{C}{H_k} \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Пусть теперь $\xi_n(t)$ — последовательность независимых одинаково распределенных процессов из $C(T, \rho)$, $M\xi(t) = 0$. Для этой последовательности выполняется центральная предельная теорема (ЦПТ), если последовательность $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t)$ слабо сходится к гауссовскому процессу $\xi(t)$ из $C(T, \rho)$.

Теорема 3. *Пусть $\xi_n(t)$ — независимые одинаково распределенные случайные процессы из $C(T, \rho)$, $M\xi_n(t) = 0$, $M\xi_n^2(t) < C < \infty$, $t \in T$. Выполняется условие*

$$\int_0^{\varepsilon} x(N(u))\, du < \infty,$$

где $N(u)$ — число элементов минимального u-покрытия пространства (T, ρ), $\rho(t, s) = \|\xi_1(t) - \xi_1(s)\|$. Если в B для любых независимых случайных величин ξ_i, $i = \overline{1, n}$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|^2 \tag{6}$$

либо если $\xi_n(t)$ принадлежат некоторому банаховому подпространству (не обязательно K_σ-пространству) B^0 пространства B, в котором существует норма $\|\cdot\|^0$, эквивалентная норме $\|\cdot\|$, и норма $\|\cdot\|^0$ удовлетворяет условию (6), тогда для $\xi_n(t)$ выполняется ЦПТ.

Доказательство. Условие $D\xi_n(t) < C < \infty$ обеспечивает слабую сходимость конечномерных распределений последовательности процессов $\eta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t)$ к гауссовскому процессу $\xi(t)$ и выполнение для любого $t \in T$ условия $\lim_{H_k \uparrow \infty} \sup_n P\{|\eta_n(t)| > H_k\} = 0$. Если норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет условию (6), то

$$\|\eta_n(t) - \eta_n(s)\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|\xi_n(t) - \xi_n(s)\|^2 = \xi_1(t) - \xi_1(s)\|^2 = \rho^2(t, s).$$

Поэтому теорема 3 следует из теоремы 2. В случае существования нормы $\|\cdot\|^0$, эквивалентной норме $\|\cdot\|$, что для $\|\cdot\|^0$ выполняется (6), доказательство теоремы почти ничем не отличается от приведенного выше.

Рассмотрим один пример. Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность субгауссовских процессов. Субгауссовская норма [1] удовлетворяет условию (6). Пространство субгауссовских случайных величин $\mathrm{sub}(\Omega)$ не является K_σ-пространством, но $\mathrm{sub}(\Omega)$ является банаховым подпространством банахова K_σ-пространства Орлича $L_U(\Omega)$, порожденного функцией $U(x) = e^{x^2} - 1$ [9], причем субгауссовская норма и норма Люксембурга для $\mathrm{sub}(\Omega)$ эквивалентны [9]. Таким образом, теорему 3 можно использовать для того, чтобы получить условия выполнения ЦПТ для последовательности субгауссовских случайных процессов. Аналогично можно рассматривать и процессы типа субгауссовских [10].

Замечание. Формулировки теоремы 1 и частично теоремы 2, а также доказательства не изменяются, если вместо банаховых K_σ-пространств случайных величин будем рассматривать полные K_σ-пространства случайных величин, снабженные квазинормой ($\|\Lambda\xi\| \neq |\Lambda| \|\xi\|$). Это даст возможность, например, изучить пространства случайных величин с квазинормами $\|\xi\| = \left(M \frac{|\xi|^r}{1 + |\xi|^r}\right)^{1/r}$, $r > 1$.

1. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О субгауссовских случайных величинах.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 723—730.
2. *Козаченко Ю. В.* Случайные величины в пространствах Орлича. 1.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1984, вып. 30, с. 54—61.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 741 с.
4. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М.: Физматгиз, 1958.— 271 с.
5. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.— 407 с.
6. *Мацак И. К.* Непрерывность случайного процесса на компакте и центральная предельная теорема в $C(S)$.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 24, с. 102—107.
7. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 2, с. 177—238.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1977.— 567 с.
9. *Козаченко Ю. В.* Условия равномерной сходимости гауссовских и близких к ним тригонометрических рядов в норме Люксембурга.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1983, вып. 28, с. 59—70.
10. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина—Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах.— Теория вероятностей и ее применения, 1982, **27**, № 3, с. 618.

Киев. ун-т им. Т. Г. Шевченко

Поступила 17.04.84